IMN

Internationale
Mathematische
Nachrichten
Nr. 254
Dezember 2023

Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

Large Language Models for Mathematicians

Reinhard Winkler

Gerhard Woeginger

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Die IMN wurden 1947 von R. Inzinger als „Nachrichten der Mathematischen Gesellschaft in Wien“ gegründet. 1952 wurde die Zeitschrift in „Internationale Mathematische Nachrichten“ umbenannt und war bis 1971 offizielles Publikationsorgan der „Internationalen Mathematischen Union“.

Von 1953 bis 1977 betreute W. Wunderlich, der bereits seit der Gründung als Redakteur mitwirkte, als Herausgeber die IMN. Die weiteren Herausgeber waren H. Vogler (1978–79), U. Dieter (1980–81, 1984–85), L. Reich (1982–83), P. Flor (1986–99), M. Drmota (2000–2007) und J. Wallner (2008–2017).

Herausgeber:

Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wiedner Hauptstraße 8–10/104, A-1040 Wien. email *imn@oemg.ac.at*, *http://www.oemg.ac.at/*

Redaktion:

C. Fuchs (Univ. Salzburg, Herausgeber)
H. Humenberger (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
J. Wallner (TU Graz)

Bezug:

Die IMN erscheinen dreimal jährlich und werden von den Mitgliedern der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft bezogen.

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung:
IBAN AT83-1200-0229-1038-9200 bei der Bank Austria-Creditanstalt (BIC-Code BKAUATWW).

Eigentümer, Herausgeber und Verleger: Österr. Math. Gesellschaft. Satz: Österr. Math. Gesellschaft. Druck: Weinitzendruck, 8044 Weinitzen.

© 2023 Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien.

ISSN 0020-7926

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Gegründet 1903
http://www.oemg.ac.at/
email: *oemg@oemg.ac.at*

Sekretariat:

Alpen-Adria-Universität Klagenfurt,
Institut für Mathematik
Universitätsstraße 65-67
A-9020 Klagenfurt
email: *oemg@oemg.ac.at*

Vorstand des Vereinsjahres 2023:

J. Wallner (TU Graz): Vorsitzender
M. Ludwig (TU Wien):
Stellvertretende Vorsitzende
C. Fuchs (Univ. Salzburg):
Herausgeber der IMN
H. Egger (JKU Linz):
Schriftführer
M. Haltmeier (Univ. Innsbruck):
Stellvertretender Schriftführer
P. Grohs (Univ. Wien):
Kassier
D. Smertnig (KFU Graz):
Stellvertretender Kassier
V. Fischer (Univ. Wien):
Beauftragte f. Frauenförderung
C. Heuberger (Univ. Klagenfurt):
Beauftragter f. Öffentlichkeitsarbeit

Beirat:

A. Binder (Linz)
M. Drmota (TU Wien)
H. Edelsbrunner (ISTA)
P. Hauer-Typpelt (KPH Wien/Krems)
H. Heugl (Wien)
S. Hochgerner (FMA)
W. Imrich (MU Leoben)
B. Kaltenbacher (Univ. Klagenfurt)
M. Kim (MathWorks)
M. Koth (Univ. Wien)
M. Kraker (Graz)
C. Krattenthaler (Univ. Wien)
W. Müller (Univ. Klagenfurt)
H. Niederreiter (ÖAW)
M. Oberguggenberger (Univ. Innsbruck)
W. Schachermayer (Univ. Wien)
K. Sigmund (Univ. Wien)
R. Tichy (TU Graz)
K. Unterkofler (FH Dornbirn)
W. Woess (TU Graz)

Vorsitzende von Sektionen und Kommissionen:

G. Leobacher (Graz)
H.-P. Schröcker (Innsbruck)
A. Wiegele (Klagenfurt)
F. Pillichshammer (Linz)
S. Blatt (Salzburg)
S. Gerhold (Wien)
H. Humenberger (Didaktikkommission)
E. Aichinger (Verantwortlicher für Entwicklungszusammenarbeit)

Die Landesvorsitzenden und der Vorsitzende der Didaktikkommission gehören statutengemäß dem Beirat an.

Mitgliedsbeitrag:

Jahresbeitrag: € 35,–

Bankverbindung: IBAN AT83-1200-0229-1038-9200

Internationale Mathematische Nachrichten

International Mathematical News

Nouvelles Mathématiques Internationales

Nr. 254 (77. Jahrgang) **Dezember 2023**

Inhalt

Simon Frieder, Julius Berner, Philipp Petersen, Thomas Lukasiewicz: Large Language Models for Mathematicians 1

Mathias Beiglböck, Martin Goldstern, Gabriel Maresch, Christian Steineder: Reinhard Winkler 1964–2021 21

Eranda Çela, Bettina Klinz: Gerhard J. Woeginger 1964–2022 35

Buchbesprechungen 45

Women in Mathematics 48

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 53

Neue Mitglieder 65

Ausschreibung der Preise der ÖMG 67

Zum Umschlagbild: Die Perkolationstheorie ist ein Teil der Stochastik. Hugo Duminil-Copin, der letztes Jahr mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde, hat wichtige Beiträge zu diesem Gebiet geliefert, wobei er sich besonders mit Übergangsprozessen auseinandergesetzt hat. Einen schönen Überblicksartikel zur Perkolationstheorie von ihm findet man unter arXiv:1712.04651. Das Bild am Umschlag zeigt einen Ausschnitt einer Kantenperkolation der Ebene, die einer Bernoulli-Verteilung mit $p = 0{,}51$ folgt.

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 254 (2023), 1–20

Large Language Models for Mathematicians

Simon Frieder, Julius Berner, Philipp Petersen, Thomas Lukasiewicz

University of Oxford, Caltech, University of Vienna, Vienna University of Technology/University of Oxford

Large language models (LLMs) such as CHATGPT *have received immense interest for their general-purpose language understanding and, in particular, their ability to generate high-quality text or computer code. For many professions, LLMs represent an invaluable tool that can speed up and improve the quality of work. In this note, we discuss to what extent they can aid professional mathematicians. We first provide a mathematical description of the transformer model used in all modern language models. Based on recent studies, we then outline best practices and potential issues and report on the mathematical abilities of language models. Finally, we shed light on the potential of LMMs to change how mathematicians work.*

1 Introduction

Large language models (LLMs) recently revolutionized the field of natural language processing, bringing forth unparalleled progress for applications such as conversational bots or text generation. Advances in deep-learning algorithms, computational resources, as well as substantial engineering efforts, allowed to train language models with billions of parameters and on massive datasets, such as the 800GB large *The Pile* [14]. Being trained on increasingly larger datasets, language models infer essential aspects of the structure of language[1], paving the way from task-specific to general-purpose language understanding. As such, these models can also parse mathematical questions and solve (sometimes surprisingly

[1] We note that language models work best in English since the most extensive datasets, including those that contain mathematics, are available in English.

ISSN 0020-7926 © 2023 Österr. Math. Gesellschaft

complex) mathematical problems and tasks—however, they also make embarrassing mistakes.

Let us have a look at two examples that CHATGPT (web version of 30-January-2023) produced[2]. Both examples below were taken from [13]; the input to the model, as well as its output, consists of LaTeX code, which we have compiled below for better readability:

"prompt": "Find a function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ that is continuous at precisely one point.",
"output": "One example of such a function is

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if } x\neq 0 \\ 1 & \text{if } x=0. \end{cases}$$

This function is continuous at $x=0$ but not at any other point."

"prompt": "Let μ be a measure, $\|f\|_\infty=\inf\{M:\mu(\{x:|f(x)|>M\})=0\}$ and $\|g\|_1=\int|g|d\mu$. Prove that $\int|fg|d\mu\leq\|g\|_1\|f\|_\infty$.",
"output": "Let $M=\|f\|_\infty$ and $\varepsilon>0$. Then, by the definition of $\|f\|_\infty$, we have $\mu(\{x:|f(x)|>M+\varepsilon\})=0$. Therefore,

$$\int|fg|d\mu=\int_{|f|\leq M+\varepsilon}|fg|d\mu+\int_{|f|>M+\varepsilon}|fg|d\mu\leq(M+\varepsilon)\int|g|d\mu+\int_{|f|>M+\varepsilon}|f||g|d\mu.$$

The second term on the right side is zero because $\mu(x:|f(x)|>M+\varepsilon)=0$. So we have $\int|fg|d\mu\leq(M+\varepsilon)\int|g|d\mu=(M+\varepsilon)\|g\|_1$. As ε can be arbitrarily small, we can let it go to zero and we get $\int|fg|d\mu\leq M\|g\|_1=\|f\|_\infty\|g\|_1$. Hence proved."

The first response is nonsensical on all levels, whereas the second is correct and helpful. With these examples in mind, we might ask ourselves: *How can large language models assist human mathematicians in their work?*

To address this question, this article proceeds in the following way: First, we provide an overview of modern language models. We clarify the theory of how language models work, how their main building block—the *transformer* architecture—is set up, and why these models can perform sufficient mathematics to assist mathematicians in their daily work. Understanding this architecture will also highlight how an LLM produces an answer to a mathematical question which differs tremendously from how a mathematician arrives at an answer. Then, we present empirical evidence attesting to the abilities of language models, in particular state-of-the-art models, such as CHATGPT and GPT-4. We end with an outlook on the potential future impacts on mathematicians and mathematics in general.

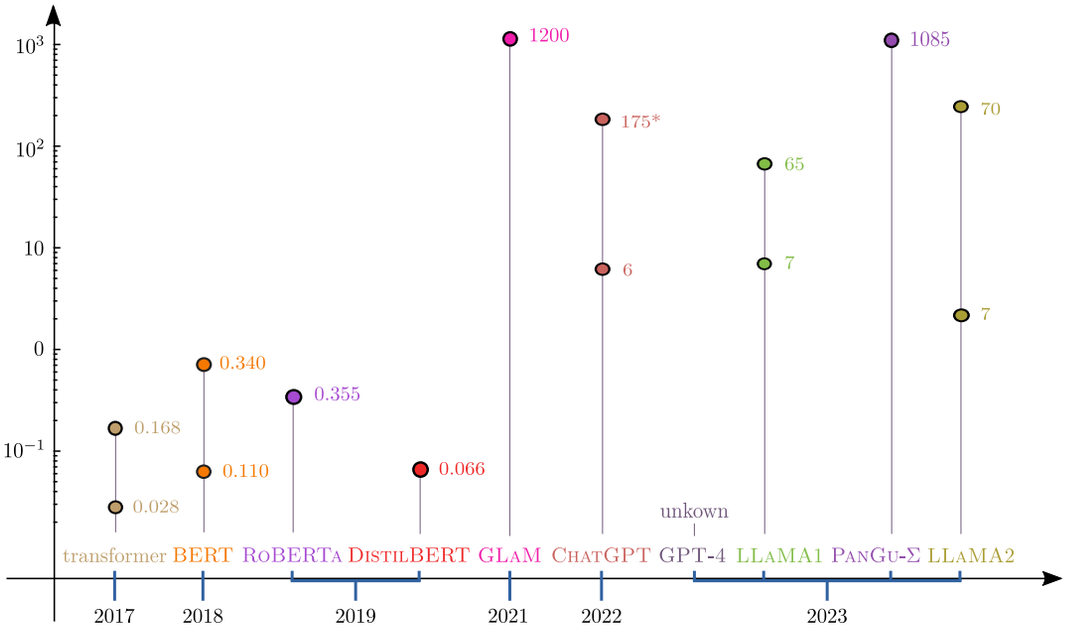

Figure 1: A selection of representative, modern language models is presented along with their parameter counts (in billions), which are displayed above. The y-axis is a log-axis, and model ranges are displayed (two horizontal dots), where available, for each model. We observe that a wide range of parameters appears, between 28 million and 1.2 trillion. For ChatGPT, exact parameter counts are not available but are taken from InstructGPT, which is a sibling model in which ChatGPT is based. For GPT-4, parameter counts are not available.

2 Overview of Modern Language Models

The concept of language models has a long history. One of the pioneering achievements, dating back to the year 2000, presented one of the initial instances of what we now refer to as *word embeddings* within the framework of neural networks [3]; see Section 3 for a definition.

Most previous approaches were rooted in estimating probabilities over *trigrams* (or, more general, n-grams). An n-gram is a sequence of n adjacent elements from a string of word pieces, so-called *tokens*, which could be syllables, letters, words, or base pairs according to the context. In the sentence ≪`The quick brown fox jumps over the lazy dog`≫, the sequence ≪`quick brown fox`≫ is an example of a trigram. Models based on n-grams had severe limitations: For example, if a trigram does not appear in the training corpus (or contains words that were not in the vocabulary of the corpus), no

[2]The first example can by now be correctly answered by the GPT-4 model [26], which was since released. We explain the acronym ≪GPT≫ in Section 2.

meaningful way of estimating its probability existed. By using a form of word embeddings, these problems are circumvented. The model proposed by [3] dominated all other pure n-gram models. The authors note that improvements can be made regarding the ≪*architecture, computational efficiency, and taking advantage of prior knowledge*≫.

The introduction of the *transformer architecture* [40] in 2017 marked the most striking advancement in terms of neural network architectures: On the one hand, the attention mechanism modeled the structure of the language more faithfully; on the other hand, it was an architecture that was easily parallelizable on modern hardware (see Section 3 for details). This led to a series of further milestones and improvements: In 2018, the *Bidirectional Encoder Representations from Transformers* (BERT) model [7] was introduced, a successor to the original transformer, which inspired a vast number of successors on its own, such as RoBERTa [22], or DistilBERT [32]. BERT (and its successors) were notable because classical pipelines (e.g., defining text representations, carrying out parts-of-speech tagging) were all subsumed by BERT-type models [36], which could easily be fine-tuned to specific tasks. At roughly the same time as the BERT model, the *Generative Pre-Trained Transformer* (GPT) model was introduced by OpenAI [28]. This was a further variation on the original transformer architecture and is the first version of the model that underlies ChatGPT, which was released in 2022 [25], and is closely related to InstructGPT [27].

The last milestone consists of the LLaMA [38] and LLaMA2 models [39] introduced in 2023, months after GPT-4 [26]. Their importance lies in being the first publicly released models, the code and weights of which were easily accessible and rivaled the performance of GPT-4; in the technical report associated with GPT-4 it is stated: ≪*this report contains no further details about the architecture (including model size), hardware, training compute, dataset construction, training method, or similar*≫. The LLaMAmodels led to a democratization of language models and to a large number of further successors, such as Stanford's Alpaca[3] model, or the Vicuna[4] model, which have since been used in a wide array of contexts. As these models evolved, the number of their parameters, as well as the sizes of the dataset on which they were trained, kept increasing, from the order of millions of parameters (in case of [3, 40, 7]), to billions [39, 38], to trillions [8, 30], see Figure 1. While the main trend indicates increasing model sizes, there is a countertrend to make the models smaller while retaining the performance. The DistilBERT model is an example of this. Scaling the size of the architectures and the amount of training data enabled unprecedented capabilities for the resulting LLMs, eliminating the need for fine-tuning for specific tasks.

[3] https://github.com/tatsu-lab/stanford_alpaca
[4] https://lmsys.org/blog/2023-03-30-vicuna/

3 Technical Background

In the following, we seek to give a brief introduction to the inner workings of LLMs. We refer to [44, 23] for surveys and further details. We do not strive to present state-of-the-art models and techniques in natural language processing but focus on a conceptual understanding of the functionality of LLMs. In particular, we will restrict the presentation to one of the most popular architectures, the so-called transformer [40]. Our description below is a simplified, mathematical summary loosely based on the (open-source) code[5] of GPT-2 [29], see also Figure 2 for an overview.

3.1 Transformer Architecture

Let us explore how a transformer architecture predicts text based on some provided input, often referred to as *prompt*. In line with successful models, such as the GPT and LLAMA series, we focus on the setting, where the model iteratively predicts the next word pieces (i.e., tokens) based on a given sequence

[5] https://github.com/openai/gpt-2

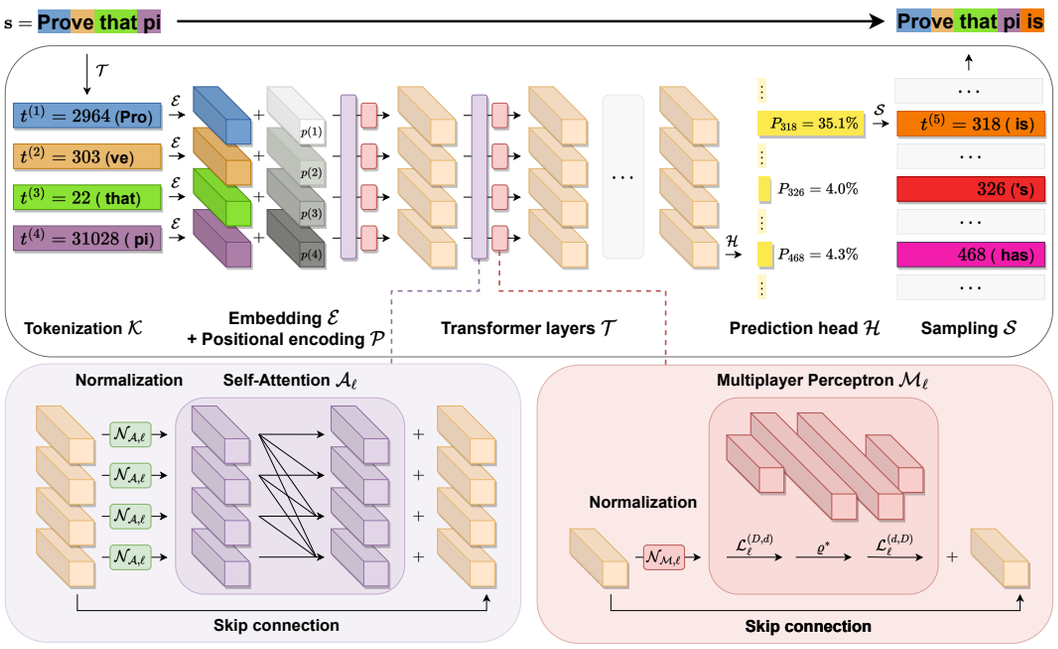

Figure 2: Illustration of the operations of an LLM for the input text «`Prove that pi`». The token indices, as well as the probabilities for the next token, are taken from GPT-2 [29] using the implementation in the `transformers` library [41]. The highest probability for the next token is assigned to `318` corresponding to the word «`is`».

of tokens. This procedure is coined *autoregressive* since the prediction of new tokens is only based on previous tokens. Such conditional sequence generation tasks using autoregressive transformers are often referred to as *decoder-only* settings. Although there is a maximum *context length* in practice, we will work with sequences of arbitrary length for ease of presentation. We define the shorthand notation $S^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$ for a set S to denote the set of sequences $\boldsymbol{s} = (s^{(i)})_{i=1}^n \subset S$ with arbitrary length $n \in \mathbb{N}$. For a function $\mathcal{F}\colon S_1 \to S_2$, we denote by $\mathcal{F}^*\colon S_1^* \to S_2^*$ the *entrywise* applied mapping given by

$$\mathcal{F}^*(\boldsymbol{s}) := (\mathcal{F}(s^{(i)}))_{i=1}^n. \tag{1}$$

Tokenization $\mathcal{K}$. First, we want to clarify how we define word pieces, i.e., tokens. Mathematically speaking, we seek an injective mapping $\mathcal{K}\colon A^* \to T^*$ from the given text, i.e., a sequence $\boldsymbol{a} = (a^{(i)})_{i=1}^N$ of characters in an alphabet A to a sequence of $n \leq N$ tokens $(t^{(i)})_{i=1}^n$, where typically $T := \{1, 2, \ldots, M\}$.

To represent text on a computer, we could encode every character $a^{(i)}$ individually, similar to *Unicode*. While this would lead to a small vocabulary T of tokens, it yields long sequences where individual tokens do not capture any linguistic information. For LLMs, one often employs *subword tokenization* [34], which creates a vocabulary of subwords by analyzing large text corpora and iteratively merging frequently occurring sequences of characters. Akin to a compression problem, one balances the length n of the sequences and the size[6] M of the vocabulary. As an example, the GPT-4 tokenizer[7] splits the word «discontinuity» into the subwords «dis» (prefix), «contin» (subword capturing the root of «continuous»), and «uity» (suffix). Another example can be found in Figure 2.

Embedding $\mathcal{E}$. To use these tokens (given by the indices of the subwords in the vocabulary) in a neural network, we embed each token $t^{(i)}$ into the same Euclidean space $E := \mathbb{R}^d$. Intuitively, we seek a map $\mathcal{E}\colon T \to E$, such that the distance $\|\mathcal{E}(t^{(i)}) - \mathcal{E}(t^{(j)})\|$ corresponds to the linguistic similarity of the subwords represented by the tokens $t^{(i)}$ and $t^{(j)}$. In practice, such an embedding is often initialized with a sequence of M random initial embeddings and learned jointly with the transformer model from data.

Positional Encoding $\mathcal{P}$. Since $\mathcal{E}$ operates on each token $t^{(i)}$ independently, the embeddings $\mathcal{E}(t^{(i)})$ do not contain information on the position i of the (sub)words

[6] The LLAMA and LLAMA2 models, employ vocabularies T with $M = 32000$ tokens [39]. GPT-2 uses $M = 50257$, and other models in the GPT series, e.g., GPT-3.5-TURBO and GPT-4, even use $M = 100277$ tokens, see https://github.com/openai/tiktoken.

[7] See https://platform.openai.com/tokenizer.

within a sentence[8]. Thus, one typically adds so-called *positional encodings*, which can be described by a mapping $\mathcal{P}\colon E^* \to E^*$. A commonly used choice is of the form

$$\mathcal{P}((e^{(i)})_{i=1}^n) := (e^{(i)} + p(i))_{i=1}^n, \tag{2}$$

where $p\colon \mathbb{N} \to E$ can be a prescribed injective function, e.g., a sinusoid [40], or learned (similar to the embedding $\mathcal{E}$) [28].

In summary, tokenization $\mathcal{K}$, followed by an application of $\mathcal{E}$ to each token and the positional encoding $\mathcal{P}$, maps the text $\boldsymbol{a} \in A^*$ to a sequence of embeddings

$$\boldsymbol{e} := (\mathcal{P} \circ \mathcal{E}^* \circ \mathcal{K})(\boldsymbol{a}) \in E^*. \tag{3}$$

where the length of $\boldsymbol{e}$ depends on $\boldsymbol{a}$ and the tokenization algorithm.

Transformer $\mathcal{T}$. The transformer can be represented as a neural network $\mathcal{T}\colon E^* \to E^*$. It is trained to map a sequence of embeddings $\boldsymbol{e}$ to another sequence of the same length containing contextual information. Based on the desired autoregressive structure, where the prediction of the next token only depends on the previous tokens, we want the i-th element of $\mathcal{T}(\boldsymbol{e})$ to contain information about all the embeddings $(e^{(j)})_{j \le i}$, however, to be independent of $(e^{(j)})_{j > i}$.

The transformer is typically defined by a composition of $L \in \mathbb{N}$ blocks, consisting of *self-attention* maps $\mathcal{A}_\ell$, entrywise applied *normalizing layers* $\mathcal{N}_{\mathcal{A},\ell}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{M},\ell}$, and *feed-forward multiplayer perceptrons* $\mathcal{M}_\ell$, i.e.,

$$\begin{aligned}\mathcal{T} := \Big(\Big(\mathrm{Id} + \mathcal{M}_L^* \circ \mathcal{N}_{\mathcal{M},L}^*\Big) \circ \Big(\mathrm{Id} + \mathcal{A}_L \circ \mathcal{N}_{\mathcal{A},L}^*\Big)\Big) \circ \dots \\ \dots \circ \Big(\Big(\mathrm{Id} + \mathcal{M}_1^* \circ \mathcal{N}_{\mathcal{M},1}^*\Big) \circ \Big(\mathrm{Id} + \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{N}_{\mathcal{A},1}^*\Big)\Big).\end{aligned} \tag{4}$$

In the above, Id denotes the identity mapping, commonly known as a *skip* or *residual connection*, and the addition is understood entrywise. The indices of the layers $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$, and $\mathcal{A}$ in (4) indicate the use of different trainable parameters in each of the layers. Let us describe these layers in more detail below.

Layers: Normalization $\mathcal{N}$. The normalizing layer can be interpreted as a reparametrization with a learnable mean and standard deviation to stabilize training. For instance, using *layer normalization* $\mathcal{N}\colon E \to E$, we compute

$$\mathcal{N}(e) = \frac{\mathrm{diag}(s)}{\sigma}(e - \mu) + m, \tag{5}$$

where $\mu = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d e_i$ and $\sigma^2 = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^d (e_i - \mu)^2$ are the mean and variance of $e \in E$, and $s, m \in E$ are learnable parameters [1].

[8] In some settings, where the transformer architecture is permutation invariant, positional encodings are strictly necessary. In our decoder-only setting, this is not the case [15]; however, the encodings still seem to improve performance

Layers: Multilayer Perceptrons $\mathcal{N}$. The Multilayer perception (MLP) is a standard feed-forward neural network consisting of compositions of affine mappings and nonlinear activation functions. Let us define by $\mathcal{L}^{(m,n)}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ an affine mapping $\mathcal{L}^{(m,n)}(x) := Wx + b$, where the *weight matrix* $W \in \mathbb{R}^{n\times m}$ and the *bias vector* $b \in \mathbb{R}^m$ are learnable. Moreover, let $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be an activation function, e.g., the *GELU activation function* $\rho(x) := x\Phi(x)$, where Φ is the standard Gaussian cumulative distribution function [17]. A typical MLP $\mathcal{M}\colon E \to E$ used in transformers is then given by

$$\mathcal{M} := \mathcal{L}^{(d,D)} \circ \rho^* \circ \mathcal{L}^{(D,d)}, \tag{6}$$

where $D \in \mathbb{N}$ with $D \geq d$.

Layers: Self-Attention $\mathcal{A}$. As can be seen in (4) and Figure 2, the self-attention layer $\mathcal{A}\colon E^* \to E^*$ is the only layer that combines embeddings of different tokens; in other words, it *attends* to other tokens. Let us denote the input to the layer by $(e^{(i)})_{i=1}^n$ and focus on the i-th output. We first compute the (normalized) inner products

$$s_j^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{k}} \left\langle \mathcal{L}_{\text{query}}^{(k,d)}(e^{(i)}), \mathcal{L}_{\text{key}}^{(k,d)}(e^{(j)}) \right\rangle, \quad j = 1, \ldots, i, \tag{7}$$

with given $k \in \mathbb{N}$. On a high level, we can interpret $\boldsymbol{s}^{(i)} = (s_j^{(i)})_{j=1}^i \subset \mathbb{R}$ as similarities between the embedding $\mathcal{L}_{\text{query}}^{(k,d)}(e^{(i)})$ of the i-th token (i.e., the so-called *query*) and the embeddings $\mathcal{L}_{\text{key}}^{(k,d)}(e^{(j)})$ of the other tokens (i.e., *keys*); to satisfy the autoregressive structure, we only consider $j \leq i$. To normalize $\boldsymbol{s}^{(i)}$ to probabilities, we can further use a *softmax layer* softmax$\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ given by

$$\text{softmax}(\boldsymbol{s}^{(i)})_j := \frac{\exp\left(s_j^{(i)}\right)}{\sum_{k=1}^i \exp\left(s_k^{(i)}\right)}, \quad j = 1, \ldots, i. \tag{8}$$

We can now interpret $\text{softmax}(\boldsymbol{s}^{(i)})_j$ as the probability for the i-th query to «attend» to the j-th key. The self-attention layer $\mathcal{A}$ can then be defined as

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{e})_i := \mathcal{L}^{(k,d)} \left(\sum_{j=1}^i \text{softmax}(\boldsymbol{s}^{(i)})_j \mathcal{L}_{\text{value}}^{(k,d)}(e^{(j)}) \right), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{9}$$

where the outputs of $\mathcal{L}_{\text{value}}^{(k,d)}$ are often referred to as the *values* of the token embeddings $e^{(j)}$, and where the learnable affine layer $\mathcal{L}^{(k,d)}$ maps the weighted average of values back to $E = \mathbb{R}^d$.

Note that in practice, one typically considers a sum of $h \in \mathbb{N}$ such attention layers (so-called *heads*), each with dimension $k = d/h$ [40, 21]. Moreover, instead of considering vectors of variable length i, a mask enforces the autoregressive structure so that all operations can be efficiently batched.

Prediction Head $\mathcal{H}$. The *prediction head* or *un-embedding layer* can be represented as a mapping $\mathcal{H}\colon E^* \to \Delta^M$, where

$$\Delta^M := \left\{ P \in [0,1]^M \colon \sum_{i=1}^{M} P_i = 1 \right\} \tag{10}$$

denotes the probability simplex in $\mathbb{R}^M$. It maps the sequence of transformed embeddings $(\tilde{e}^{(i)})_{i=1}^n := \mathcal{T}(\boldsymbol{e})$ to a vector $P \in \Delta^M$, where P_i describes the probability of predicting $i \in T$ as the next token. Since the transformed embedding of the last token, i.e., $\tilde{e}^{(n)}$, contains information about the whole input text, a simple approach is to use a linear mapping composed with a softmax layer and define

$$P := (\mathrm{softmax} \circ \mathcal{L}^{(M,d)})(\tilde{e}^{(n)}). \tag{11}$$

Sampling $\mathcal{S}$. There are multiple *sampling* strategies $\mathcal{S}\colon \Delta^M \to T$ to arrive at the final prediction for the next token $t^{(n+1)}$, see, e.g., [18]; the arguably simplest one, so-called *greedy sampling*, predicts the token with the highest probability, i.e.,

$$t^{(n+1)} = \mathcal{S}(P) := \operatorname*{arg\,max}_{i=1,\dots,M} P_i, \tag{12}$$

see Figure 2. One can then apply the same operations to the extended sequence $\boldsymbol{t} = (t^{(i)})_{i=1}^{n+1}$, i.e.,

$$t^{(n+2)} := (\mathcal{S} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{T} \circ \mathcal{P} \circ \mathcal{E}^*)(\boldsymbol{t}) \tag{13}$$

to iteratively compute further tokens[9]. Due to the autoregressive structure, this can efficiently be done by caching the previous (intermediate) results and only considering the computations for the new token.

3.2 Training

During training, we transform text corpora into sequences of tokens, such that, for a given sequence $(t_i)_{i=1}^n$, we already know the next token t_{n+1} based on the underlying text. One can thus compute the deviation D between the predicted probabilities P of the next token and the ground-truth t_{n+1}, typically using a *cross-entropy*

[9] There is usually a stopping criterion based, e.g., on a special token or the entropy of P.

loss; in practice, this procedure can be parallelized to compute average losses across many predictions. Using *automatic-differentiation*, one then computes the derivative $\nabla_\theta D$ of the average loss D with respect to the learnable parameters $\theta \in \mathbb{R}^p$ of the transformer $\mathcal{T}$, the embedding $\mathcal{E}$, the prediction head $\mathcal{H}$ (and the positional encoding $\mathcal{P}$ if it is trainable). Updating the parameter by subtracting a sufficiently small multiple $\lambda \in (0,\infty)$ of the derivative, i.e., $\theta_{k+1} = \theta_k - \lambda \nabla_\theta D$, one can iteratively minimize the loss—a method known as *stochastic gradient descent*. This is the essential mechanism by which word occurrence probabilities are estimated by training from raw data. With substantial engineering efforts, more elaborate versions of such training schemes can be parallelized on large GPU clusters and scaled to immense amounts of data. To get an idea of the dimensions, the largest LLAMA2 model with $p = 70 \cdot 10^9$ parameters was trained for more than 1.7 million GPU hours on about 2 trillion tokens of data from publicly available sources [39].

3.3 Training Costs and Emissions

Training LLMs, as described in the previous section, is a computationally very intensive process and, therefore, costly to carry out in terms of electricity usage (assuming all the hardware would be in place). However, information about training costs and CO_2 emissions is not consistently provided in the literature. Notable exceptions include the LAMDA model. The authors [37] report that a total of 451MWh was consumed during training, and, as a result, approximately 26 tons of CO_2 were emitted. Using historic US prices[10] of 0.148 dollars per kWh, this amounts to a cost of $66,748$ dollars. We note that costs may vary by country and by the energy source used to produce energy [35]. The GLaM model consumes, when trained on the largest dataset, similarly 456MWh and emits 40.2 tons of CO_2, which places it thus in a similar category to the LaMDA model in terms of cost and emission.

However, more modern LLMs incur significantly more energy consumption and emissions. For instance, the training of LLAMA2 (using 1.7 million hours on GPUs with a power consumption of about 400W) emitted more than 291 tons of Carbon dioxide equivalent (CO_2-eq) [39]. LLM vendors (such as OpenAI) typically do not release information about the costs (either in terms of consumed megawatt-hours or (rented) GPU-hours) of training their models, so only vague estimates are possible, which nonetheless are staggering. For example, training the older-generation GPT-3 model [4] was estimated, using GPU-hour prices from that time, to run up costs of approximately 4.6 million dollars [20].

[10] https://data.bls.gov/timeseries/APU000072610

4 LLMs for Mathematics

With the foundations of LLMs now well-established, we turn our attention to their application in supporting professional mathematicians. While mathematicians engage in a broad spectrum of mathematical activities, such as performing simulations, modeling, and computation, we focus on the arguably most important task: the capacity of LLMs to generate mathematical proofs.

When using an LLM to assist in the task of theorem proving, the simplest way is to directly prompt the model to prove the statement instead of using it for individual steps or other tasks that will be described below. However, many issues have been found with this approach. A primary concern is that mathematical arguments hinge on the precision of logic; a single wrong statement very likely invalidates the entire proof. Assuming that LLMs have a non-negligible, independent probability of error with each predicted word, the *likelihood of producing a correct proof diminishes exponentially with increasing text length.* This was also empirically observed in [16], where an LLM turned out to have a higher accuracy in solving computation tasks if it was asked to skip intermediate steps.

The autoregressive nature of LLMs introduces another critical issue. Once a statement is made, LLMs typically do not revisit or revise their arguments. *This process diverges significantly from the methodologies of most mathematicians.* Rarely does a mathematician draft a complete and detailed proof in a single attempt. Instead, the process often involves crafting a rough sketch, omitting small steps in which we have confidence. This first draft is then followed by iterative refinement until the proof is complete.

Furthermore, LLMs may construct *valid proofs for questions different from those posed*. Such an instance was seen in the introduction when the LLM was prompted for a function that is continuous at only one point. Given the prevalence of similar but distinct problems in training datasets, LLMs are likely to respond to the more commonly encountered variations of a question. In this case, a question for a function that is *dis*continuous at only one point. Similarly, they may prove a theorem under stronger assumptions than stated without making this explicit.

Finally, being based solely on statistical relations of language, LLMs struggle considerably with *arithmetic problems*: These often occur when an LLM has to complete a task, such as carrying out addition or multiplication (in particular, if the involved numbers are large). The reason for this is that no numerical solver is built into LLMs. Steps towards overcoming this have recently been made by employing a Toolformer approach [33]. An instance of this is the WolframAlpha plugin that is available for GPT-4.

In summary, when LLMs are used for theorem proving, they are susceptible to a range of errors. These errors were examined in [13], to be discussed in the following chapter. Consequently, a more collaborative approach, incorporating

human expertise, is advisable. The following strategies appear to be sensible:

- **Literature/search engine:** The LLM can be prompted to explain a definition, find the established name for a vaguely described concept, or find references for a certain statement. In this context, two crucial considerations arise. First, LLMs are known for generating plausible yet fictitious content. This phenomenon is often referred to as *hallucinations*. Therefore, its answer to our queries needs to be verified. Second, the LLM may exacerbate biases in research. This can occur when an LLM overlooks inadequately cited work, effectively burying it while disproportionately recommending over-hyped articles.

- **Brainstorming/Idea Generation:** An LLM can be asked to provide a high-level idea of how to prove a theorem. While this will not produce the full result, it closely resembles the style of a mathematician. There is, however, no guarantee that this idea will be very insightful or lead to something. Being trained on a large corpus of mathematical arguments, an LLM will likely be biased towards recommending the most standard ideas. This may not be helpful for a mathematician who is already an expert in a specific field. However, it could be very valuable for a mathematician trying to enter a new area.

- **Proof-checking:** An LLM can be asked to find mistakes in a given proof. While there is no guarantee whatsoever that it will find all errors, the ones it finds can often be immediately confirmed as actual mistakes by a mathematician. This is helpful but not reliable. The LLM will likely focus on syntactical correctness over semantic correctness and hence overlook complex errors.

- **Collaborative writing:** An LLM can be asked to provide parts or a sketch of a proof and then, after taking feedback from the user, improve parts, repair errors, and add more details. In [5], the interactive performance of three LLMs (INSTRUCTGPT, CHATGPT, and GPT-4) on mathematical queries has been measured on a cohort of users. It was attempted to solve mathematical problems by using these models as an assistant. Asking definitions, general mathematical questions (not strictly related to the problem), and proof steps were the three most common use cases. It is important to keep in mind that this approach still is susceptible to introducing errors. The study found that self-assessment of individuals—whether they had correctly solved the problem using an LLM—was not always correct.

The approaches above are sensible for the successful employment of modern multi-purpose LLMs. In addition, we anticipate that LLMs specifically designed to prove theorems will be developed in the future. One avenue to achieve this

is by combining LLM-generated proofs with interactive theorem provers [6, 2]. First steps in this direction have already been taken and appear to be very promising [12, 11, 42, 43].

Subdataset Name	**Size**	**Type**
***G**rad-Text*	130	PP
***H**oles-in-Proofs*	162	FH
***O**lympiad-Problem-Solving*	101	PP
***S**ymbolic-Integration*	100	CO
*MA**T**H*	138	CO
***S**earch-Engine-Aspects*	78	SE

Table 1: A summary of all the files from all the subdatasets comprising the GHOSTS dataset, together with their size, i.e., the number of prompts and their associated attribute tags.

5 Measuring LLM Performance on Mathematics

In [13], an empirical study was carried out to study the mathematical reasoning abilities of three LLMs which were considered to be state-of-the-art in terms of general performance: Two CHATGPT versions (9-January-2023 and 30-January-2023) and GPT-4. The prompts used to carry out the evaluation correspond to some of the use cases discussed in Section 4.

(PP) *Producing proofs:* Exercises from well-known textbooks (*Probability Theory* by R. Durret [9], *Topology* by J. R. Munkres [24], and *Functional Analysis* by W. Rudin [31]) were fed to the LLMs.

(FH) *Filling holes:* Proofs with a gap were given to the LLMs, and they were asked to fill the gap.

(SE) *Acting as a mathematical search engine:* The LLMs were asked to give a definition of concepts such as: ≪*What is a Banach space?*≫. In addition, they were asked to provide the name of definitions, as in ≪*How is a complete normed vector space called?*≫. Finally, they were prompted to provide proof ideas used in famous theorems.

(CO) *Computation:* The LLMs were given mathematical tasks in which quantities had to be computed.

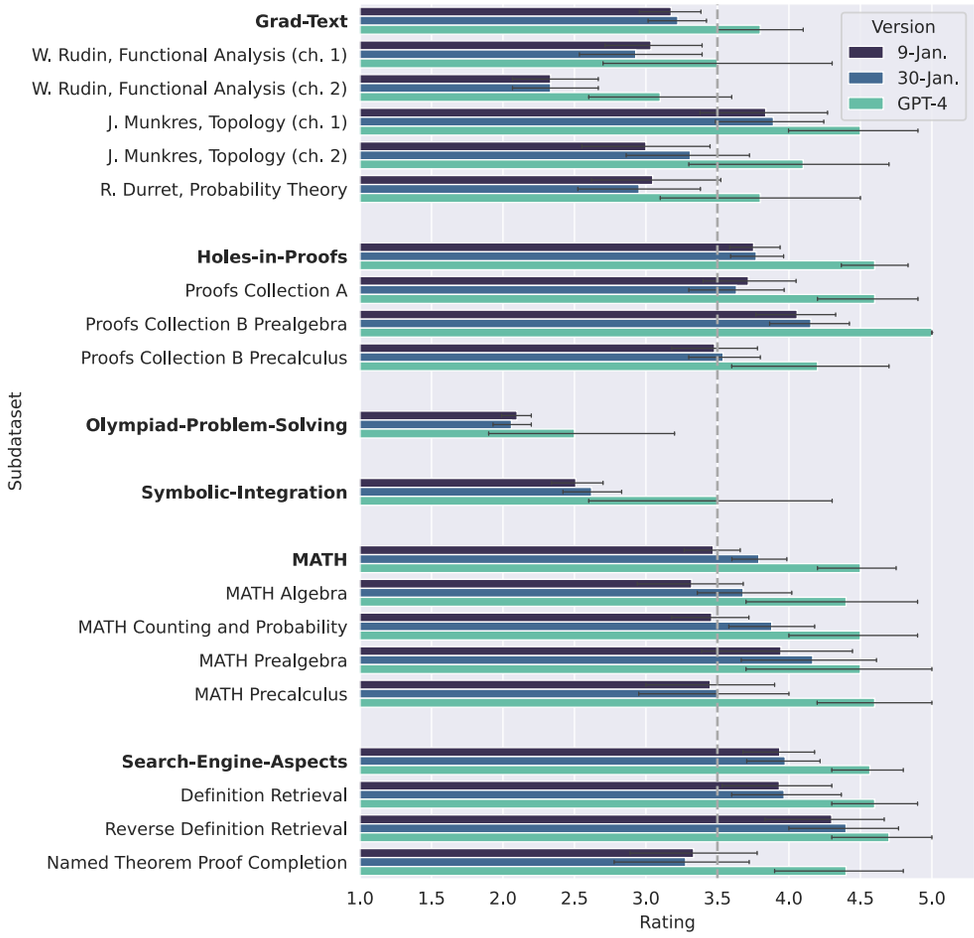

Figure 3: Average rating for each file in each subdataset (bold) of GHOSTS for the studied versions of CHATGPT and GPT-4. The maximal ranking is `5` and the minimal ranking, where the question was at least understood, is `2`; the rating of `1` indicates that the answer completely misses the question. Thus, a reasonable passing grade, i.e., 50% of points, corresponds to a score of `3.5`, indicated by the dotted line. The error bars represent 95% confidence intervals.

To carry out this analysis, the GHOSTS dataset was introduced; see Table 1 for a more detailed description of its subdatasets (which make up the acronym «GHOSTS»), as well as how they correspond to the use cases listed above. It consists of 709 prompts, each of which was given to the three considered models. The responses of the LLMs were rated by professional mathematicians[11] on a scale between one (failure to understand the query) and five (perfect or almost perfect output). The obtained ratings are shown in Figure 3. We can make the

[11]The authors of the present paper form a subset of the evaluators.

following observations:

- *The LLMs work well as a search engine:* CHATGPT and GPT-4 achieved an excellent score when we asked for definitions of a concept or the name of a theorem or definition.

- CHATGPT *and* GPT-4 *struggle with hard questions:* No version of the tested LLMs achieved satisfactory results on the hardest problem set—*Olympiad-Problem-Solving*. Similarly, on the functional analysis questions from Rudin (Chapter 2)—arguably the second most advanced set of questions in the dataset—the results were underwhelming. The ratings were substantially better for more straightforward questions, such as the exercises in topology, which only ask for simple set theory and Boolean logic.

- *Good results for simple computations:* Despite not having a built-in numerical solver, GPT-4 performed reasonably well on questions requiring simple computation. For more sophisticated computation involved in *Symbolic-Integration*, CHATGPT failed and GPT-4 barely achieved a passing grade.

- *User input can have a positive effect:* On the *Holes-in-Proofs* subdataset, we see excellent results in some of the problems. It appears that the additional context given by the user helps the LLMs to produce more truthful solutions. A similar observation was made in a separate experiment where carefully crafted prompts (so-called *prompt engineering*) slightly increased the score of the LLM on the *Olympiad-Problem-Solving* subdataset [13].

The *improvement in rating, as the models become more sophisticated*, is indicated in the Sankey diagram in Figure 4, which shows how ratings change from one model version to another. We use a representative subset of GHOSTS to advise the Sankey diagram. We observe that between the 9-January-2023 version and the 30-January-2023 version, scores are approximately shuffled, and no substantial increase of the net score occurs. For the newer generation, i.e., GPT-4, we can observe a significant improvement in the ratings. This supports the general trend that more modern models also perform better on challenging mathematical reasoning tasks.

In [13], a subdivision of each question type (as indicated in Figure 3) was made, and a much more fine-grained benchmark was introduced that also differentiates potential failure modes. We refer the reader to [13] for further information on more detailed analyses.

Figure 4: A Sankey diagram of how the ratings evolve from the 9-January-2023 version of CHATGPT to the 30-January-2023 version CHATGPT, and subsequently to GPT-4 (from top to bottom), with all models evaluated on a representative subset of GHOSTS. Each score is color-coded, and the line widths are proportional to the number of ratings.

6 Conclusion

Our study has highlighted how LLMs possess a remarkable capacity to assist mathematicians in various ways, from detecting and filling gaps in theorems to acting as search engines and finding definitions from descriptions of mathematical objects. We have shed light on the inner mechanism of the core piece of architecture that powers modern LLMs, the transformer, and how the way they produce an answer to mathematical questions differs starkly from human reasoning.

The ability of LLMs to interact with users in a natural language format has made mathematics more accessible, allowing for a broader range of individuals to engage with mathematical research and education. While the full potential of LLMs in automating mathematics is yet to be realized, our findings suggest a promising synergy between human mathematicians and artificial intelligence. High exposure of the work of mathematicians to the effects of LLMs has also been reported in [10]. However, we want to caution that, currently, LLMs are not on a trajectory to replace mathematicians. In [13], it was shown that even the best-performing model has trouble with mathematics on upper-undergraduate difficulties, such as when it is tasked to solve exercises from W. Rudin's *Functional Analysis* [31]. The performance of LLMs has been reported to be below that of humans also in related domains, such as coding challenges in computer science [19]. Nonetheless, we anticipate that the emergence of LLMs will be a challenge for education and research. Simple exercises or homework and individual steps in mathematical research will be gradually supported by automation or become obsolete.

Acknowledgments

S. Frieder and T. Lukasiewicz were partially supported by the AXA Research Fund.

References

[1] J. L. Ba, J. R. Kiros, and G. E. Hinton. Layer normalization. *arXiv:1607.06450*, 2016.

[2] B. Barras, S. Boutin, C. Cornes, J. Courant, J.-C. Filliatre, E. Gimenez, H. Herbelin, G. Huet, C. Munoz, C. Murthy, et al. *The Coq proof assistant reference manual: Version 6.1*. PhD thesis, Inria, 1997.

[3] Y. Bengio, R. Ducharme, and P. Vincent. A neural probabilistic language model. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 13, 2000.

[4] T. Brown, B. Mann, N. Ryder, M. Subbiah, J. D. Kaplan, P. Dhariwal, A. Neelakantan, P. Shyam, G. Sastry, A. Askell, et al. Language models are few-shot learners. *Advances in neural information processing systems*, 33:1877–1901, 2020.

[5] K. M. Collins, A. Q. Jiang, S. Frieder, L. Wong, M. Zilka, U. Bhatt, T. Lukasiewicz, Y. Wu, J. B. Tenenbaum, W. Hart, et al. Evaluating language models for mathematics through interactions. *arXiv:2306.01694*, 2023.

[6] L. de Moura, S. Kong, J. Avigad, F. Van Doorn, and J. von Raumer. The Lean theorem prover (system description). In *Automated Deduction-CADE-25: 25th International Conference on Automated Deduction*, pages 378–388, 2015.

[7] J. Devlin, M.-W. Chang, K. Lee, and K. Toutanova. BERT: Pre-training of deep bidirectional transformers for language understanding. *arXiv:1810.04805*, 2018.

[8] N. Du, Y. Huang, A. M. Dai, S. Tong, D. Lepikhin, Y. Xu, M. Krikun, Y. Zhou, A. W. Yu, O. Firat, et al. GLaM: Efficient scaling of language models with mixture-of-experts. In *International Conference on Machine Learning*, pages 5547–5569. PMLR, 2022.

[9] R. Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 2019.

[10] T. Eloundou, S. Manning, P. Mishkin, and D. Rock. GPTs are GPTs: An early look at the labor market impact potential of large language models. *arXiv:2303.10130*, 2023.

[11] E. First, M. N. Rabe, T. Ringer, and Y. Brun. Baldur: whole-proof generation and repair with large language models. *arXiv:2303.04910*, 2023.

[12] S. Frieder, R. Alawadhi, M. Trimmel, and K. Gy. LLMs vs ITPs. In *The 3rd Workshop on Mathematical Reasoning and AI at NeurIPS'23*, 2023.

[13] S. Frieder, L. Pinchetti, R.-R. Griffiths, T. Salvatori, T. Lukasiewicz, P. C. Petersen, A. Chevalier, and J. Berner. Mathematical capabilities of ChatGPT. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 36, 2023.

[14] L. Gao, S. Biderman, S. Black, L. Golding, T. Hoppe, C. Foster, J. Phang, H. He, A. Thite, N. Nabeshima, et al. The Pile: An 800GB dataset of diverse text for language modeling. *arXiv:2101.00027*, 2020.

[15] A. Haviv, O. Ram, O. Press, P. Izsak, and O. Levy. Transformer language models without positional encodings still learn positional information. *arXiv:2203.16634*, 2022.

[16] D. Hendrycks, C. Burns, S. Kadavath, A. Arora, S. Basart, E. Tang, D. Song, and J. Steinhardt. Measuring mathematical problem solving with the math dataset. *arXiv:2103.03874*, 2021.

[17] D. Hendrycks and K. Gimpel. Gaussian error linear units (GELUs). *arXiv:1606.08415*, 2016.

[18] A. Holtzman, J. Buys, L. Du, M. Forbes, and Y. Choi. The curious case of neural text degeneration. *arXiv:1904.09751*, 2019.

[19] A. Koubaa, B. Qureshi, A. Ammar, Z. Khan, W. Boulila, and L. Ghouti. Humans are still better than ChatGPT: Case of the IEEEXtreme competition. *arXiv:2305.06934*, 2023.

[20] C. Li. OpenAI's GPT-3 language model: A technical overview, 2020. https://lambdalabs.com/blog/demystifying-gpt-3.

[21] L. Liu, J. Liu, and J. Han. Multi-head or single-head? an empirical comparison for transformer training. *arXiv:2106.09650*, 2021.

[22] Y. Liu, M. Ott, N. Goyal, J. Du, M. Joshi, D. Chen, O. Levy, M. Lewis, L. Zettlemoyer, and V. Stoyanov. RoBERTa: A robustly optimized bert pretraining approach. *arXiv:1907.11692*, 2019.

[23] B. Min, H. Ross, E. Sulem, A. P. B. Veyseh, T. H. Nguyen, O. Sainz, E. Agirre, I. Heintz, and D. Roth. Recent advances in natural language processing via large pre-trained language models: A survey. *ACM Computing Surveys*, 56(2):1–40, 2023.

[24] J. R. Munkres. *Topology*. Prentice-Hall, 2000.

[25] OpenAI. Introducing ChatGPT, 2022. https://openai.com/blog/chatgpt.

[26] OpenAI. GPT-4 technical report. *arXiv:2303.0877*, 2023.

[27] L. Ouyang, J. Wu, X. Jiang, D. Almeida, C. Wainwright, P. Mishkin, C. Zhang, S. Agarwal, K. Slama, A. Ray, et al. Training language models to follow instructions with human feedback. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 35:27730–27744, 2022.

[28] A. Radford, K. Narasimhan, T. Salimans, I. Sutskever, et al. Improving language understanding by generative pre-training, 2018. https://openai.com/research/language-unsupervised.

[29] A. Radford, J. Wu, R. Child, D. Luan, D. Amodei, and I. Sutskever. Language models are unsupervised multitask learners, 2019. https://github.com/openai/gpt-2.

[30] X. Ren, P. Zhou, X. Meng, X. Huang, Y. Wang, W. Wang, P. Li, X. Zhang, A. Podolskiy, G. Arshinov, et al. PanGu-Σ: Towards trillion parameter language model with sparse heterogeneous computing. *arXiv:2303.10845*, 2023.

[31] W. Rudin. *Functional analysis*. McgGraw-Hill, 1991.

[32] V. Sanh, L. Debut, J. Chaumond, and T. Wolf. DistilBERT, a distilled version of BERT: smaller, faster, cheaper and lighter. *arXiv:1910.01108*, 2019.

[33] T. Schick, J. Dwivedi-Yu, R. Dessì, R. Raileanu, M. Lomeli, L. Zettlemoyer, N. Cancedda, and T. Scialom. Toolformer: Language models can teach themselves to use tools. *arXiv:2302.04761*, 2023.

[34] R. Sennrich, B. Haddow, and A. Birch. Neural machine translation of rare words with subword units. *arXiv:1508.07909*, 2015.
[35] E. Strubell, A. Ganesh, and A. McCallum. Energy and policy considerations for deep learning in NLP. *arXiv:1906.02243*, 2019.
[36] I. Tenney, D. Das, and E. Pavlick. BERT rediscovers the classical NLP pipeline. *arXiv:1905.05950*, 2019.
[37] R. Thoppilan, D. De Freitas, J. Hall, N. Shazeer, A. Kulshreshtha, H.-T. Cheng, A. Jin, T. Bos, L. Baker, Y. Du, et al. Lamda: Language models for dialog applications. *arXiv:2201.08239*, 2022.
[38] H. Touvron, T. Lavril, G. Izacard, X. Martinet, M.-A. Lachaux, T. Lacroix, B. Rozière, N. Goyal, E. Hambro, F. Azhar, et al. Llama: Open and efficient foundation language models. *arXiv:2302.13971*, 2023.
[39] H. Touvron, L. Martin, K. Stone, P. Albert, A. Almahairi, Y. Babaei, N. Bashlykov, S. Batra, P. Bhargava, S. Bhosale, et al. Llama 2: Open foundation and fine-tuned chat models. *arXiv:2307.09288*, 2023.
[40] A. Vaswani, N. Shazeer, N. Parmar, J. Uszkoreit, L. Jones, A. N. Gomez, Ł. Kaiser, and I. Polosukhin. Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30, 2017.
[41] T. Wolf, L. Debut, V. Sanh, J. Chaumond, C. Delangue, A. Moi, P. Cistac, T. Rault, R. Louf, M. Funtowicz, J. Davison, S. Shleifer, P. von Platen, C. Ma, Y. Jernite, J. Plu, C. Xu, T. L. Scao, S. Gugger, M. Drame, Q. Lhoest, and A. M. Rush. Transformers: State-of-the-art natural language processing. In *Proceedings of the 2020 Conference on Empirical Methods in Natural Language Processing: System Demonstrations*, 2020.
[42] K. Yang and J. Deng. Learning to prove theorems via interacting with proof assistants. In *International Conference on Machine Learning*, pages 6984–6994. PMLR, 2019.
[43] K. Yang, A. M. Swope, A. Gu, R. Chalamala, P. Song, S. Yu, S. Godil, R. Prenger, and A. Anandkumar. LeanDojo: Theorem proving with retrieval-augmented language models. *arXiv:2306.15626*, 2023.
[44] W. X. Zhao, K. Zhou, J. Li, T. Tang, X. Wang, Y. Hou, Y. Min, B. Zhang, J. Zhang, Z. Dong, et al. A survey of large language models. *arXiv:2303.18223*, 2023.

Authors' addresses:

Simon Frieder
Department of Computer Science, University of Oxford,
Wolfson Building, Parks Road, Oxford OX1 3QD, UK
email simon.frieder@cs.ox.ac.uk

Julius Berner
Department of Computing and Mathematical Sciences, California Institute of Technology,
1200 East California Boulevard, Pasadena, California 91125, USA
email jberner@caltech.edu

Philipp Petersen
Faculty of Mathematics and Research Network Data Science, University of Vienna,
Kolingasse 14-16, A-1090 Vienna, AUSTRIA
email philipp.petersen@univie.ac.at

Thomas Lukasiewicz
Artificial Intelligence Techniques, Institute of Logic and Computation, Vienna University of Technology,
Erzherzog-Johann-Platz 1, 1040 Wien, AUSTRIA
email thomas.lukasiewicz@tuwien.ac.at
and
Department of Computer Science, University of Oxford
Wolfson Building, Parks Road, Oxford OX1 3QD, UK
email thomas.lukasiewicz@cs.ox.ac.uk

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 254 (2023), 21–34

Reinhard Winkler 1964–2021

Mathias Beiglböck, Martin Goldstern, Gabriel Maresch, Christian Steineder

Universität Wien, TU Wien

Im Oktober 2021 verstarb unser Kollege und Freund Reinhard Winkler im Alter von nur 57 Jahren. Die Lücken, die er hinterlässt, sind groß und zahlreich. Dieser Nachruf macht den Versuch, den vielen Interessen, die Reinhard verfolgt hat, und den vielen Leben, die er auf so unnachahmliche Art und Weise beeinflusst und bereichert hat, gerecht zu werden. Zahlreiche, sehr persönlich gefärbte Erinnerungen sollen hier zu einem Gesamtbild beitragen. Reinhard war ein ungemein vielseitiger Mensch. Für uns, seine Freunde und Kollegen, war es zwar die Mathematik, die zunächst dafür verantwortlich war, dass sich unsere Wege kreuzten. Dennoch war ihm anderes mindestens genauso wichtig. Vor allem Musik. Vor allem Schubidubert.

Einzug ins Hartmanbeisl

Christian Steineder, Schüler und Kollege (Doktorat 2005, Hartmanbeisl):

Reinhard ergriff mich von der ersten Stunde, die ich bei ihm als damals bestenfalls durchschnittlich engagierter Studierender erfahren durfte. Ich erinnere mich noch, mit welcher Freude ich mich bereits wenig später, wesentlich intensiver als vorgesehen, auf die Prüfung meiner ersten Spezialvorlesung bei ihm vorbereitete. Über seinen handschriftlichen Überblicks-Blättern zu meditieren, seinen begeisternden Vortrag vor dem inneren Auge, bescherte mir einige der schönsten Tage, die ich im Studium verbrachte. Bald stand für mich fest, dass ich bei Reinhard meine Diplomarbeit schreiben möchte. Sein wohlwollendes Grundvertrauen in die Fähigkeiten von Menschen erlaubte mir, diesen Wunsch zu erfüllen. Er förderte mich und nahm mich in seinem soeben bewilligten Forschungsprojekt auf. Sein Rückhalt und seine fachliche Unterstützung waren Pfeiler meines Doktorats, sein Blick auf die Welt prägt mich bis heute. Doch gewichtiger als die Möglichkeiten, die mir Reinhard als Mentor eröffnete, wiegt die im Laufe der gemeinsamen Zeit gewachsene Freundschaft.

ISSN 0020-7926 © 2023 Österr. Math. Gesellschaft

Mathias Beiglböck, Schüler und Kollege (Doktorat 2004, Hartmanbeisl):

Ich hatte das Glück, Reinhard zu Beginn meines Studiums kennenzulernen. Anfangs sah ich zu ihm als Lehrer auf, aber über unsere mehr als zwanzigjährige Beziehung hinweg hat sich daraus eine tiefe Freundschaft entwickelt.

Reinhard hat mich mit seiner Art, Mathematik zu sehen, tief geprägt und inspiriert. Eines unserer ersten längeren Gespräche fand statt, als ich zu Beginn meines dritten Semesters nach der Kardinalität der Borelmengen fragte. Reinhard gab mir sofort ein Privatissimum in axiomatischer Mengenlehre, transfiniter Induktion und insbesondere Kardinalzahlarithmetik und malte sogar alle notwendigen Details mit seinem Finger an die Säule vor dem grünen Lift. Bis heute erinnere ich mich lebhaft daran, wie ich während des gesamten Gesprächs besorgt war, wie ich dem positiven Bild, das Reinhard von mir hatte, gerecht werden könnte. Dieser Eindruck sollte paradigmatisch für unsere gesamte Beziehung werden. Solange wir uns kannten, fühlte ich mich immer von ihm überschätzt und motiviert, seinem Bild von mir gerecht zu werden. Trotzdem gab er mir immer das Gefühl, dass seine große Wertschätzung für mich nicht an Bedingungen geknüpft war. Ich war stets überzeugt, dass ich nichts von Reinhards Wohlwollen einbüßen würde, wenn ich in Mathematik nicht erfolgreich wäre oder mich für einen anderen Weg entscheiden würde.

Am Anfang unserer Freundschaft sagte Reinhard einmal, er könne nun anerkennen, dass er selbst im Gegensatz zu mir kein junger Mathematiker mehr sei und sich mehr aufs Philosophieren verlegen dürfe. Mittlerweile bin ich selbst älter als Reinhard damals war. Ich kann jetzt etwas besser einschätzen, welcher Mathematiker ich geworden bin. Im Rückblick kann ich sagen, dass Reinhard mich umfassend und in jeder Hinsicht tief geprägt hat. Eines seiner Lieblingskonzepte war immer die Kompaktheit, und das habe ich von ihm übernommen. Nahezu egal, an welchem Thema ich arbeite, steht dieser Begriff im Zentrum. Reinhard hatte eine tiefe Liebe, Verbindungen und Analogien zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten aufzuspüren. Bis heute empfinde ich das als höchstes Ideal für mathematische Forschung.

Vom Versuch, ein bedeutender Mathematiker zu werden

Reinhard Winklers mathematische Arbeit selbst begann in der Zahlentheorie: In seiner Diplomarbeit befasste er sich mit dem Primzahlsatz, in seiner Dissertation und den nächsten Jahren mit Gleichverteilung. Bald wandte er sich jedoch der Topologie zu, wo ihn insbesondere kompakte Räume und Kompaktifizierungen von Gruppen interessierten; sein besonderer Liebling war die Pontrjagin-Dualität.

Geprägt von seinen Vorlieben setzte er unter anderem das Werk mathematischen Vorfahren zum Thema Gleichverteilung im Rahmen sogenannter Hartman-Mengen fort. So zeigte er, wie eine Hartman-Menge den Umgebungsfilter ihrer zugrundeliegenden Kompaktifizierung induziert. Dieser Zusammenhang war die Grundlage für weitere kombinatorische, ergodentheoretische, gruppentheoretische und geometrische Ergebnisse.

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{COMP}, \leq) \arrow[dl] & \\
(\mathcal{FILT}, \subseteq) \arrow[rr] & & (\mathcal{SUB}, \subseteq)) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Doch eine Aufzählung einzelner Gebiete oder Resultate würde ihm nicht gerecht werden. In seiner Forschung und vor allem in der Lehre erfreute es ihn immer wieder, Schönheit in der Mathematik zu entdecken. „Schön" waren Resultate insbesondere dann, wenn sie Zusammenhänge zwischen verschiedenen Gebieten der Mathematik aufzeigen konnte. Reinhard hatte breites Interesse an der Mathematik, und erfreute sich auch an Resultaten in Gebieten, in denen er nicht arbeitete, wie etwa in der Mengenlehre und allgemeiner in der mathematischen Logik.

Reinhard hatte stets den Wunsch, die verschiedenen mathematischen Themen zu vereinen und dabei den Fokus auf Ideen anstelle technischer Details zu legen. Effekthascherei war ihm zuwider, und stattdessen war es ihm wichtig, den Inhalt zu vermitteln und Menschen durch Ideen und Inspiration zu erreichen. Dabei fehlte ihm jegliche persönliche Eitelkeit. Als einen der Höhepunkte seiner Karriere als Lehrender und wahrscheinlich als Mathematiker insgesamt, empfand er seine 2019 gehaltene Vorlesung „Ein mathematisches Perlengeflecht". Angefangen bei Euklid, über die Gödel'schen Sätze bis zum zentralen Grenzwertsatz beschreibt die Vorlesung einen unglaublichen thematischen Bogen. Dabei richtet sie sich sowohl an mathematische Laien als auch an begabte Studierende und Kolleginnen und Kollegen und versteht diese gleichermaßen für tiefe mathematische Ideen zu begeistern.

Erkenntnis

Die Neugierde und das Streben, auch „etablierte" Mathematik für sich (und andere) immer wieder neu und besser zu ergründen und zu ordnen, machten seine besondere Beliebtheit als akademischer Lehrer aus: *Lieber verstehen als ausrechnen. Lieber andere bewundern als sich selbst preisen.*

Martin Goldstern, Mitstudent und Kollege:

> *Obwohl wir in der gleichen Volksschule waren, entdeckten wir einander erst beim gemeinsamen Besuch einer Logik-Vorlesung an der Universität Wien. Uns verband unser gemeinsames Interesse an der mathematischen Logik und überhaupt an der Schönheit und Tiefe der Mathematik.*
>
> *Reinhard hat seine Arbeit sehr ernst genommen und war sich vor allem seiner Verantwortung als Lehrer sehr bewusst. Aber auch wenn er beschäftigt war, gab es stets Anlass, über diverse Themen zu sprechen: über Mathematik oder Musik, über den Falter und den ORF, über Gott und die Welt.*
>
> *Die Welt, das war zum Teil die Welt der Mathematik, in der er seine Rolle sehr bescheiden sah und sich lieber für fundamentale Erkenntnisse anderer begeisterte. Das war auch die Welt der Lehre, wo er trotz mancher negativer Erfahrungen unerschütterlich an dem Glauben festhielt, dass man Mathematik jeder Studentin und jedem Studenten beibringen kann.*

Reinhard Winkler war ein äußerst engagierter Hochschullehrer, dem vor allem die mathematische Grundausbildung sowohl der Ingenieurinnen und Ingenieure als auch der Lehramtskandidatinnen und -kandidaten am Herzen lag.

Legendär waren Reinhards Prüfungsangaben. So wie auch in seinen Emails legte er Wert auf korrekte und ausführliche, fast literarische Formulierungen, und er investierte viel Arbeit darin, nicht nur Wissen, sondern auch Verständnis abzuprüfen. Eine Aufgabe in einer schriftlichen Prüfung konnte etwa aus einem fast vollständigen Beweis bestehen, wobei nur noch einige Lücken zu füllen waren: Warum genügt es, dies nur für stetige Funktionen zu zeigen? Welche Äquivalenz haben wir gerade bewiesen?

Neben den Lehrveranstaltungen hielt er auch regelmäßig Vorträge für Mathematiklehrerinnen und -lehrer im Rahmen der „Didaktiktage". Er verfasste zahlreiche didaktische Publikationen, in denen er den Zusammenhang verschiedener Gebiete der Mathematik betonte; er war auch Mitglied der Didaktikkommission der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft.

Daneben war ihm die Popularisierung der Mathematik ein großes Anliegen. Er war viele Jahre in math.space aktiv und war einer der Gründer des TUForMath (Forum Mathematik der TU Wien).

Fachschaft Bau- und Umweltingenieurwesen der TU Wien:

Professor Winkler prägte eine Generation von Bau- und Umweltingenieurstudierenden, da er eine der zentralen Vorlesungen des ersten Studienjahres hielt. Viele Studierende erhielten durch Reinhard Winkler nicht nur vertiefte Einblicke in die höhere Mathematik und wurden von ihr in ihren Bann gezogen, sondern waren auch von seiner Fähigkeit, zu anderen Themen wie der Philosophie oder der Musik zu sprechen und in seinem Unterricht Querverweise herzustellen, fasziniert. Auch in schwierigen Zeiten wollte Reinhard Winkler, dass seine Lehre qualitativ hochwertig ist; legendär sind seine Ausführungen über das Wesen sinnvoller Prüfungen. Er wird uns in Erinnerung bleiben.

Michael Drmota, Mitstudent und Kollege:

Reinhard war einer meiner besten Freunde. Wir haben einander bereits am Beginn unseres Mathematikstudiums an der TU Wien im Jahr 1982 kennen gelernt und waren dann später über Jahrzehnte am selben Institut an der TU Wien – es sind auch einige gemeinsame Publikationen entstanden. Reinhard war außerordentlich vielseitig. Neben Mathematik interessierte er sich für Musik, Kunst, Philosophie und vieles andere mehr. Und die Verbesserung der Mathematikausbildung (sowohl in den Schulen, als auch auf der Universitäten) war ihm ein großes Anliegen. Ein Gespräch mit Reinhard war immer bereichernd und nie langweilig oder oberflächlich. In den letzten Jahren haben einige Kolleginnen und Kollegen, Reinhard und ich das Outreach-Projekt „TUForMat" an der TU Wien aufgebaut; das wäre ohne ihn, ohne sein grenzenloses Engagement und ohne seinen Ideenreichtum wohl nicht so gelungen. Er war ein großartiger Mensch. Wir vermissen ihn alle sehr.

Ästhetik

Die Schönheit sucht und fand Reinhard aber nicht nur in der Mathematik sondern auch – und zwar in ganz besonderem Ausmaß – in der Musik.

Gabriel Maresch, Schüler und Kollege (Doktorat 2005, Hartmanbeisl)

Ich habe selten, eigentlich nie, jemanden getroffen, dessen Begeisterung für Musik ein so integraler Bestandteil seiner Persönlichkeit war wie bei Reinhard. Bezeichnend ist, dass er manchmal sein Leben, im Scherz, eingeteilt hatte in eine Zeit vor seinem ersten Opernbesuch, und eine Zeit danach. Ich, als jemand, dem das theatralische Gebaren auf einer Opernbühne stets

ziemlich fremd war, und der ich die potentielle Langatmigkeit einer solchen Aufführung fürchtete, konnte das anfangs nicht verstehen. Was ich aber verstand, war, wieviel Zeit sich Reinhard genommen hat, mir die Oper näher zu bringen, die vielen Stunden die er über Wagner, Mozart, da Ponte sprach, und wie allgegenwärtig ihm diese Welt stets war. Auch in Gesprächen, die vordergründig nur wenig damit zu tun hatten, fand Reinhard nicht selten eine Szene aus Don Giovanni oder Cosí, die er dazu verwenden konnte, seine Ideen, seinen Standpunkt, seine Sicht der Dinge, zu verdeutlichen.

War man bei Reinhard und Eva in ihrer Wohnung in der Lazaristengasse zu Gast, egal ob in ganz kleiner oder ganz großer Runde, es wurde stets am Flügel gespielt (meist Schubert) oder eine Oper gehört. Die Stunden, die ich, nachdem mich Reinhard doch noch erfolgreich von der Schönheit und Brillanz von Don Giovanni et al. überzeugt hatte, mit einem Libretto in der Couch versunken mit ihm und Eva die Aufnahmen großer Einspielungen gehört hatte, gehören zu meinen schönsten Erinnerungen.

Seine zweite große Liebe, man könnte es seine „Lebensmusik" nennen, war Schubert. Es ist müßig, an dieser Stelle eine Beschreibung des Werks, der Rezeption oder der Interpretation dieses Komponisten geben zu wollen. Meine ganz persönliche Erfahrung war, mit Reinhard einen Menschen gefunden zu haben, der einerseits wohl mehr über das Schubert'sche Werk wusste als die meisten, andererseits aber auch verstand, die unmittelbaren, tiefen, und so schwer in Worte zu fassenden Empfindungen, die diese Musik auslöst, zu transportieren. Er konnte seinem Gegenüber das Gefühl zu geben, verstanden zu werden, ein Weggefährte zu sein und still die Mischung aus Verstörung und Verzückung, die Schubert'sche Melodien in der Seele des Zuhörers verursachen, mitzuerleben.

Kurzum, wenn man all die Aspekte, die Reinhard sonst zu dem gemacht haben, was er war, wenn man die Mathematik weg ließe, die Wissenschaft, die Politik, seine Salons, seine Vorlesungen, seine Vorträge: alleine die Begeisterung und Warmherzigkeit, die man beim gemeinsamen Hören und sprechen über Musik von Reinhard erfahren konnte, hätten ihn zu einem so wertvollen Menschen gemacht, dass es schwer ist, beim Gedanken daran, dass er nicht mehr ist, nicht in Verzweiflung zu verfallen. Eine Verzweiflung wie sie, wenn überhaupt, nur Schubert trösten kann.

Christian Steineder

Speziell verband uns unsere Freude an der Musik, trotz durchaus abweichender Zugänge zu ihr. Reinhards Wissen zu Schubert, Beethoven, Mozart, Wagner, etc schien grenzenlos, zu fast jeder Situation des Lebens konnte er eine passende Sequenz einer Oper zitieren (und mir erklären). Ich erinnere mich noch, als er mir auf einer Zugfahrt von Prag nach Wien eine mehrstündige

Kurzeinführung zu Wagners Ring gab. Die Stunden verflogen, wann immer er am Klavier vortrug. Auch wenn er sich gerne als Tastendrücker abwertete, sein Klavierspiel war beneidenswert und gerade wegen seiner spürbaren Begeisterung mitreißend. Bemerkenswert war meines Empfindens auch, wie sehr er einem natürlichen Zugang zum Musizieren treu bleiben konnte, als ob er am Klavier seinem scharfen Verstand eine Pause gönnen konnte. (Als er eines Tages von einem Klavierlehrer zu einer leicht verständlichen Übung aufgefordert wurde, die ihm nicht gelingen wollte, blickte er auf: „So muss es sich anfühlen, wenn man etwas offenbar Leichtes in Mathematik nicht versteht.")

Mathias Beiglböck

Mein Alleinstellungsmerkmal unter Reinhards Schülern ist mein gänzlich fehlender Zugang zur Musik. Ich empfand es als rührend, wie sehr er sich bemühte, mir die Musik näherzubringen, indem er mich zu Konzerten motivierte, mir CD-Sammlungen schenkte und mich als Gast zu Musikabenden bei sich zu Hause einlud. Ich denke, dass er letztendlich nicht akzeptieren konnte, dass ich als ansonsten vernünftiger Mensch keinen Zugang zu einem so wichtigen Teil der Welt hatte. Als Reinhard zum 200-jährigen Jubiläum der TU Wien unter dem Titel „Drei Versuche, eine kulturell bedeutende Universität zu werden" über „decomposing composers" schrieb, ermöglichte er mir, mich mit Bildern von bedeutenden Denkmälern bedeutender Musikschaffender zu beteiligen. Dadurch fühlte ich mich großzügig akzeptiert in meiner Andersartigkeit.

Ideale und Moral

Mathematik war für Reinhard keine abgehobene Wissenschaft und Musik keine bildungsbürgerliche Eitelkeit. So wie in der Mathematik war es ihm auch in politischen und gesellschaftlichen Zusammenhängen wichtig, Komplexität zu erkennen und zu verstehen, oder zumindest sich um ein Verstehen zu bemühen.

Martin Goldstern

Bewundernswert war seine Fähigkeit, mühelos Kontakte mit anderen Menschen zu finden, und Gemeinsamkeiten mit ihnen, auch mit jenen, die einen anderen Hintergrund, eine andere Überzeugung, eine andere Religion hatten. Er hat Missstände und Fehlentwicklungen mit sehr kritischen Augen gesehen, war aber immer bereit, die Fähigkeiten anderer anzuerkennen und ihnen ihre Schwächen zu verzeihen.

Politisch schlug das Herz des gründlichen Falter-Lesers links und grün. Es betrübte ihn, wenn andere auf allzu simple Slogans hereinfielen und sich nicht die Mühe machten, einen oder zwei Schritte weiter zu denken. Gerade in seinen letzten Jahren stiegen seine Befürchtungen um die politische Zukunft Österreichs, insbesondere angesichts der Erfolge des primitiven Populismus nicht nur einer österreichischen Partei.

Christian Steineder

Reinhard diagnostizierte pointiert unterschiedlichste Aspekte des Menschseins. War das Thema auch Mathematik, Politik, Religion, Kunst, Musik, ... der Mensch dahinter war meist der gemeinsame Nenner.

Auch das Verstehen von Menschen und deren Beziehungen trieb ihn an. Leider bescherte ihm jedoch viel zu oft irrationales (dummes) Verhalten mancher Menschen große Sorge. Universitäre, politische oder allgemeine gesellschaftliche Missstände beschäftigten ihn sehr. Besonders litt er, wenn ihm nahe Menschen wohl bedachten Argumenten mit Ignoranz begegneten. Derartige Probleme im persönlichen Umfeld quälten ihn bitterlich. Reinhards Fähigkeit, Eventualitäten umfassend zu erkennen und zu antizipieren, also seine ethische Orientierung („Je umfassender der Kontext, in dem eine ethische Bewertung vorgenommen wird, desto bessere Ergebnisse sind zu erwarten"), war besonders, aber bescherte ihm auch viel Unwohlsein. In Reinhards Worten: „Die Stärken eines Menschen sind auch seine Schwächen."

Mathias Beiglböck

Reinhard war immer kritisch gegenüber Ideologien, die er als nicht hilfreich für die Menschen empfand, und er war zutiefst dagegen, sich auf Kosten anderer einen Vorteil zu verschaffen. Doch auf persönlicher Ebene, wenn es um konkrete Menschen ging, war Reinhard stets mild und wohlwollend. Tatsächlich war er ein großes Vorbild in seiner wunderbaren Eigenschaft, die guten Qualitäten in seinen Mitmenschen zu entdecken – und zwar nicht oberflächlich, sondern tiefgehend. Gleiches galt für seine Beziehung zur Mathematik: Er wusste vor allem die Erkenntnisse und Einsichten anderer zu schätzen. So schön es ist, das Gute im anderen zu sehen, tut es mir leid, dass Reinhard manchmal diese Milde sich selbst gegenüber nicht walten ließ. Im Nachhinein bedauere ich, dass ich ihn nicht zu mehr Milde gegenüber sich selbst ermutigt habe.

Weitere Stimmen

Robert Tichy, Dissertationsbetreuer

Reinhard Winkler war einer meiner ersten Dissertanten an der TU Wien, wo er 1988 mit einer Arbeit zur Theorie der Gleichverteilung promovierte. Während seiner Arbeit an der Dissertation und die Jahre danach führten wir oft intensive und anregende Gespräche über Mathematik, Politik, Kunst und vieles mehr. Er war ein vielseitig interessierter Mensch mit gutem Geschmack, nicht nur in der Mathematik. Besonders deutlich trat sein ausgeprägter Sinn für Ästhetik in der Mathematik zu Tage, als wir an unserer gemeinsamen Arbeit über gleichverteilungserhaltende Transformationen feilten. Diese Arbeit (Acta. Arith. 1991) ist durch seinen Stil maßgeblich geprägt, ebenso die gemeinsame Arbeit über Pseudozufallszahlen und deren Anwendung zur Komposition von Walzern (ein Nachdruck findet sich in den IMN, 2022). Sein Zugang zur Mathematik war stets ein struktureller, was ihm auch als akademischer Lehrer ein großes Anliegen war. Oft haben wir uns in seinem damaligen Büro an der Akademie der Wissenschaften getroffen, wo wir viel Zeit zum Diskutieren hatten: seine Formulierungen waren präzise, sein Humor subtil (insbesondere wenn über Kollegen gesprochen wurde). Auch an gemeinsame Wanderungen erinnere ich mich gerne, besonders an jene auf den Zirbitzkogel (mit anschließendem feudalen Essen), oder die Bergtouren auf den Hochschwab und auf den Grimming. Reinhard fehlt uns allen sehr.

Johanna Beate Brunar, im Namen der Mathematik-Studierenden, Kohorte 2018

Obwohl unser Jahrgang Professor Winkler coronabedingt leider fast nur online kennenlernen durfte, hinterließen seine perfekt strukturierten Vorlesungen einen bleibenden Eindruck. Nicht wenige von uns entdeckten durch ihn ihre Leidenschaft für die Algebra. Bezeichnend für die Liebe zum Detail, die seine Lehrveranstaltungen prägte, war, als er nach der Hälfte der Vorlesung völlig entsetzt einen Fehler auf der ersten Tafel entdeckte: Er hatte die Überschrift des Kapitels nur ein- anstelle von zweimal unterstrichen, wie es sich für Hauptüberschriften gehöre! Besonders in Erinnerung blieb uns auch die einmalige Prüfungsatmosphäre. Um trotz geschlossener Universitäten die Prüfungen persönlich abnehmen zu können, lud er ins Café im Resselpark ein. Wir sind froh und stolz, Professor Winkler erlebt haben zu dürfen und wissen sein Engagement in ehrendem Andenken zu bewahren.

Norbert Sauer, Lehrer und Kollege

Reinhard war ein ganz hervorragender junger Student in einer meiner Vorlesungen, als ich ein „sabbatical year" an der Wiener Technischen Universität hatte. Von da an waren für mich das Treffen und die Gespräche mit Reinhard immer ein Höhepunkt meiner Europaaufenthalte. Es ist ein wahrer Genuss gewesen, mit Reinhard Mathematik und deren Lehre, ethische Fragen, Politik, Religion und philosophische Themen zu besprechen. Reinhard hatte die bewundernswerte Gabe, seine Einstellung und Gedanken zu solchen Themen in ganz klarer eleganter Form schriftlich darzustellen. Seine Gedanken werden in mir bleiben. Seine angenehme bescheidene Art werde ich vermissen.

Günther Eigenthaler, Lehrer und Kollege

Reinhard Winkler war mehr als 30 Jahre lang ein Kollege und Freund, den ich sehr geschätzt habe. Gemeinsam haben wir die Lehrveranstaltungen Algebra und Funktionalanalysis betreut, wobei mir sein breites mathematisches Wissen zugute kam. Oft wandte ich mich mit einer Frage an ihn, die er immer kompetent und geduldig beantwortete. Gerne denke ich auch an die zahlreichen Kaffee-Pausen, in denen wir – neben mathematischen Themen – häufig über Politik und Weltanschauung sprachen. Dabei war Reinhard immer ein sehr angenehmer Gesprächspartner, und ich habe auch hier viel von ihm gelernt. Weiters haben wir im Laufe der Jahre einige Wanderungen unternommen, vor allem bei den jährlich stattfindenden Institutsausflügen, aber auch privat in kleinem Kollegenkreis. So standen wir (zusammen mit Gerhard Dorfer) im August 1997 auf dem Gipfel des Großvenedigers. Oft denke ich an die schöne Zeit mit Reinhard und vermisse ihn sehr.

Wolfgang Herfort, Kollege

Die Lücke, die Reinhard in mir hinterlässt, ist in Worten nicht fassbar. Meine erste Begegnung war wohl bei Vorträgen am Algebra-Institut, zu denen er mich einlud. Von ca. 1990 an, als er schon an seiner Habilitations-Arbeit schrieb, und einige Male mit lokal kompakte Gruppen betreffenden Fragen zu mir kam, begannen wir uns über breitgestreute Themen, sowohl innerhalb der Mathematik, aber auch z.B. Ethik und Bildungspolitik, zu unterhalten.

„Aha"-Erlebnisse, etwa verborgene Zusammenhänge ans Licht zu bringen, hat Reinhard geschätzt und gewürdigt. Seine Arbeiten zeigen, wie sehr er selbständige Gedanken zu fassen imstande war, sowohl bei der Themenwahl, aber auch beim Klären der sich ergebenden mathematischen Probleme, abseits gängiger Schablonen.

Seine Fähigkeit, Wertschätzung für seine Mitmenschen und deren Leistun-

gen auszudrücken, habe ich einzigartig gefunden und mag mit ein Grund sein, warum soviele junge, hochbegabte Leute seine Nähe, Inspiration und wissenschaftliche Betreuung gesucht haben, und inzwischen selbst erfolgreich in ihrem Beruf geworden sind. Im gleichen Maße hat Reinhard sich erbost fühlen können, wenn Lehre zu sinnentleerter Schablone wurde.

Ein besonderes Vergnügen bereitete es Reinhard und seinen Zuhörern, wenn er aufgefordert wurde, die Stimme von Oskar Werner in unnachahmlicher Weise zu imitieren. Er konnte sich, wie man in Wien sagt, über einen Witz, ein Bonmot, eine Episode, rundweg „zerkugeln".

Clemens Schindler, Student und Kollege

Kennengelernt habe ich Reinhard 2016 als Professor, der bestrebt war, seine Vorlesung auch nach vielen Semestern immer weiter zu verbessern und die optimale Präsentation für die Studierenden zu finden, anstatt sich mit der bequemen Routine zufrieden zu geben. In den Folgejahren habe ich in Gesprächen mit ihm erstmals nicht nur auf inhaltlicher Ebene über Mathematik nachgedacht (Definition A, Satz X), sondern auch auf philosophischer Metaebene (in welcher Hinsicht haben die Sätze X und Y aus verschiedenen Teilgebieten der Mathematik durch ähnliche Einsichten und Abstraktionen die menschliche Erkenntnis vorangebracht, und Ähnliches). Ich bin sicher, dass ich nicht der Einzige bin, dessen Gefühl für mathematische Schönheit Reinhard mitgeprägt hat. Reinhard war ein Mensch, dem andere Menschen wichtig sind – insofern steht er für mich für die menschliche Seite der Mathematik.

Gregor Kastner, Student und Kollege

Reinhard erlebte ich als unermüdlichen Idealisten, der den zahlreichen Wirren und Irren zum Trotz nie den Blick für die höheren Ideale verlor. Strukturen, Zusammenhänge, Wechselspiele: das waren seine Herzensthemen, welche mich von Anfang an beeindruckt und bewegt haben. Zuerst als Hörer seiner Vorlesung zu Funktionentheorie. Hinreichend unwissend und ignorant, empfand ich dieses mathematische Teilgebiet als antiquiert. Reinhard gelang es jedoch in beeindruckender Weise, seinen Vortrag als konzise inner- und außermathematische Umschau zu gestalten. Immer mit dem Augenmerk auf den Kern der Sache gerichtet, ließ er vermeintlich unverwandte Gebiete in ganz neuem Lichte auferstehen. Diese Reinhard'sche Qualität *prägte unsere spätere Zusammenarbeit mit dem BIFIE, in der Lehrendenbildung und im math.space (später TUforMath). Und auch bis zuletzt viele persönliche Gespräche. Gleichgültig wie groß die Mühen der Ebene, immer mit dem Blick zu den Sternen. R.I.P.*

Clemens Fuchs, Student und Kollege

Ich habe Reinhard als Dozent an der TU Wien Ende der 90er Jahre kennengelernt. Nicht nur sein Angebot an Spezial-Lehrveranstaltungen war hervorstechend, auch sein Auftreten, sein Enthusiasmus und sein Zugang, selbst bei seinen eigenen Lehrveranstaltungen etwas (bzw. viel) Lernen zu wollen, waren ungewöhnlich. Einige seiner Lehrkonzepte, wie den Gesamtüberblick kunstvoll grafisch darzustellen, habe ich von ihm übernommen. Als Student im Seminar der Algebra-Gruppe erfuhr ich, dass Reinhard nicht nur als Dozent, sondern auch als Wissenschaftler an der ÖAW tätig war. Einem Zufall war es geschuldet, dass ich nicht in Reinhards ÖAW-Gruppe, sondern in Graz mein Doktoratsstudium aufgenommen habe. Durch meinen Doktorvater wurde Reinhard zu meinem „älteren Bruder". Und genau so hat es sich auch angefühlt, wenn wir bei diversen Treffen über die verschiedensten Themen diskutiert und (im positivsten Sinne) gestritten haben. Ganz wichtig war ihm dabei stets, wie Mathematik vermittelt wird. Meine letzten Erinnerungen an ihn kommen aus dem Umfeld der ÖMG, für die Reinhard viel wertvolle Arbeit geleistet hat. Zeitgleich mit meiner Übernahme der Herausgeberschaft der IMN, ist Reinhard aus der Redaktion ausgeschieden. Trotzdem hat er regelmäßig weiter Artikel beigesteuert, die z.T. auf sehr viel Resonanz gestoßen sind (z.B. sein Beitrag im Heft Nr. 237 zur Zentralmatura). Reinhard, deine Energie, deine unkonventionellen Ideen und deine Leidenschaft fehlen uns. Du hast viele Spuren hinterlassen, wir werden dich nicht vergessen!

Ingeborg Zerbes, Wahlverwandte

Reinhard war mein selbstgewählter Bruder. Unsere Freundschaft hat insofern mittelbar begonnen, als wir über jeweils andere miteinander in Kontakt standen. Eigenständig wurde sie, als Reinhard, damals bereits promoviert, mit mir für meine Matura Mathematik gelernt hat. Der Prüfungsstoff bestand damals, wie wohl auch heute, eher in Rechenbeispielen als in Mathematik, wie Reinhard mir klar-, und mir gerade letztere zugänglich, gemacht hat, in anderen Worten: Er hat mir Verständnis vermittelt. Das hat uns von nun an mit steigender Intensität verbunden – letzten Ende war es eine gemeinsame Sprache. Nein, ich bin keine Mathematikerin, sondern Juristin geworden, aber: Auch die Methode, zu normativen Aussagen zu gelangen, ist eine Sprache, die fordert, einen Gedanken aus dem jeweils vorhergehenden abzuleiten, deren Qualität auf logischen – nicht im alltagssprachlich missbrauchten, sondern im Sinn von denkmöglichen – Schlüssen beruht, die verlangt, logisch zwingende von jenen, die der Sachgerechtigkeit entsprechen oder politischen Zielen dienen, präzise zu trennen und Fehldeklarationen zu entlarven. Reinhard hat daher immer betont, „dass die Logik in den Rechtswissenschaften hinsichtlich gewisser . . . formaler Aspekte derart große Ähnlichkeit mit man-

chen typischen Merkmalen der Mathematik“ habe und er „mit Juristen, deren Denken stark von ihrem Fach geprägt ist, fast immer zu sehr fruchtbaren Gesprächen“ finde (aus seinem „Ethischen Kompass“, 2017). Das macht mich heute noch stolz. Ich vermisse seine brillante Ausdruckskraft, seine Begeisterung, seine Repliken, sein didaktisches Können, seine Fähigkeit, Strukturen zu suchen und zu erkennen und fallweise auch in Bilder zu übersetzen.

Reinhard hat sich zunehmend mit Ethik und – unter diesem Anspruch – auch mit Politik auseinandergesetzt. Meine Entwicklung war parallel. Ihn kann kaum etwas derartig wütend machen, wie eine ausgrenzende, verächtliche, Fakten vereinfachende bis hin zu ignorierende, nationalistische bis hin zu religiös verbrämter Hegemonie. Die zurzeit im Aufwind befindlichen Trends würden ihm weh tun. Ich vermisse ihn als Gegenüber für diese Fragestellungen, seinen Zorn, sein Rückgrat.

Genauso intensiv verbindet uns die Auseinandersetzung mit dem Wissenschaftsbetrieb. Auf der einen Seite war Reinhard tief mit der akademischen Ausbildung und Forschung und mit dem Grundprinzip der Universität als eine Verbindung von Lehrenden und Lernenden verbunden. Andererseits hat er den Universitätsbetrieb als „ein ideales Forum für Menschen, die ihr Ego mit einer sogenannten wissenschaftlichen Exzellenz zu mästen suchen“ (aus seinem „Ethischen Kompass“, 2017) entlarvt. Reinhard findet Eitelkeit zum Kotzen. Ich vermisse seine intellektuelle Redlichkeit, seinen Blick hinter auch noch so eloquent errichtete Fassaden, seine scharfe Kritik.

Das „Ringen von Menschen um ihr Selbstwertgefühl“, die, „sobald ihre ursprünglichen Ambitionen enttäuscht werden, zum Selbstbetrug als ultimative, wenn auch untaugliche Strategie“ greifen (aus seinem „Ethischen Kompass“, 2017), führt zum Thema „Familie“, von Reinhard nicht als „Keimzelle“ sondern als „Krebszelle“ der Gesellschaft bezeichnet. Aus gutem Grund. Allzu genau kennt er meine, kenne ich seine Familie. Ich vermisse ihn als Gegenüber, mit dem man diese Systeme analysieren und allein deswegen Entlastung finden kann. Ich vermisse seine Klarheit, seine Beobachtungsgabe, seinen Humor. Begonnen hat unsere Freundschaft auf dem Opernstehplatz. Später waren Eva, Reinhard und ich in Konzerten; diese Phase war zu kurz: Erst 2019 bin ich aus meiner langen Zeit an der Uni Bremen zurück nach Wien gekommen, um das Abo „Wiener Klaviertrio“ in meinen Alltag aufzunehmen. Ich vermisse Reinhards Musikalität, sein feines Gespür für Ästhetik, seine Lust, seine Analysen.

Ich vermisse die Gedanken, zu denen Reinhard nicht mehr gekommen ist. Ich vermisse meinen intelligenten, komplizierten, uneitlen, direkten, musikalischen, differenzierten, kritischen, herzlichen, ernsthaften, kompromisslosen, meinen brillanten Freund.

Epilog

Oft ertappen wir uns beim Gedanken, an Reinhards Bürotür klopfen zu wollen. Eine Situation, auf die ein Zitat aus dem Herrn Karl oder den Letzten Tagen der Menschheit passt, teilen zu wollen. Oder von Parallelaktionen zu schwadronieren oder eine Strophe aus dem Krüppellied zu rezitieren. Das können wir jetzt nicht mehr. Er geht uns allen ab!

Adresse des korrespondierenden Autors (Martin Goldstern):
TU Wien, DMG/Algebra, Wiedner Hauptstr. 8-10/104, A-1040 Wien
email martin.goldstern@tuwien.ac.at

Internat. Math. Nachrichten
Nr. 254 (2023), 35–44

Gerhard J. Woeginger 1964–2022

Eranda Çela, Bettina Klinz
TU Graz

Gerhard Woeginger ist am 1. April 2022 nach einem 9-monatigen Kampf mit Krebs in Aachen verstorben. Trotz der Schwere seiner Erkrankung kam dies unerwartet und als großer Schock für seine Familie, Freunde und Kollegen. Aus unserer Kommunikation mit Gerhard und aus Erzählungen von Kollegen wissen wir, dass er unzählige Pläne für die Zukunft hatte. So hatte er vor, im Sommer 2022, wie jedes Jahr seit seines beruflich bedingten Umzugs in das Ausland (mit Ausnahme von 2021, bedingt durch seine Erkrankung), ein paar Wochen in Graz zu verbringen und sich gemeinsam mit Kollegen der TU Graz alten und neuen Forschungsfragen zu widmen. Er beabsichtigte auch trotz einer kräftezehrenden Therapie seine Lehrveranstaltung im Sommersemester 2022 (Start in Aachen im April) abzuhalten und hatte Pläne für diverse Konferenzteilnahmen und andere Aktivitäten. Gerhard hatte immer viele Pläne, Fragen, Ideen und auch Lösungen und es fiel ihm schwer sich auszuruhen. Für ihn gab es keine klare Trennung von Urlaub und Arbeit, von Forschung und Freizeit — das eine war Teil des anderen und ging fließend ineinander über.

Im Folgenden möchten wir einige Aspekte des beruflichen Wirkens Gerhard Woegingers und seiner Person aus unserer persönlichen Perspektive beleuchten. An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir, wenn nicht konkrete Personen angesprochen werden, aus Gründen der leichteren Lesbarkeit das generische Maskulinum verwenden, dass jedoch damit Personen aller Geschlechter angesprochen sind.

1 Biographische Informationen

Gerhard Woeginger wurde am 31. Mai 1964 in Graz als Gerhard Wöginger geboren. Früh in seiner Karriere entschied er sich für die Schreibweise Woeginger, ließ diese auch in seinen Reisepass eintragen und verwendete sie in allen Publikationen, weswegen wir hier ebenfalls diese Schreibweise verwenden.

Von 1974 bis 1982 besuchte Gerhard Woeginger das BG/BRG Pestalozzi in Graz. Das Interesse und die Begabung für Mathematik, aber auch die Neigung den Dingen auf den Grund zu gehen, sie zu verstehen und hernach anderen zu erklären, zeigten sich bei ihm schon früh. 1982-1987 studierte Gerhard Technische Mathematik an der TU Graz. Seine Diplomarbeit „On Vapnik-Chervonenkis dimension

ISSN 0020-7926 © 2023 Österr. Math. Gesellschaft

one“ wurde von Emo Welzl betreut. 1988 nahm er eine Stelle an der FU Berlin an. 1990 kehrte er nach Graz zurück und war zunächst im Rahmen eines Forschungsprojektes von Franz Rendl am damaligen Institut für Mathematik der TU Graz tätig. Gerhard Woeginger promovierte 1991 bei Franz Rendl mit der Dissertation „Geometric clustering, reconstruction and embedding Problems: combinatorial properties and algorithms“. Von 1991 bis 1994 war Gerhard Woeginger als Universitätsassistent am Institut für Grundlagen der Informationsverarbeitung (Leiter Wolfgang Maass) tätig und wechselte später in die Gruppe von Rainer Burkard am Institut für Mathematik als dort eine Stelle als Universitätsassistent frei wurde. Bereits damals war Gerhard ein Grenzgänger zwischen den Welten der (diskreten) Mathematik und der (theoretischen) Informatik und wie wenige in beiden Welten zu Hause.

1995 habilitierte er sich an der TU Graz mit der Habilitationsschrift „On-line algorithms for bin-packing and scheduling problems“ für das Lehrgebiet „Diskrete Mathematik und Grundlagen der Informationsverarbeitung“. Im Anschluss an seine Habilitation verbrachte Gerhard Woeginger im Rahmen eines Postdoctoral Fellowships von EIDMA (Institute for Discrete Mathematics and Applications) ein Jahr an der TU Eindhoven in der Gruppe von Jan Karel Lenstra. In dieser Zeit konnte er wichtige Verbindungen aufbauen, die sich als zentral für seine nächsten Karriereschritte herausstellen sollten. 2000 war er im Rahmen eines Paul Erdös Research Fellowships einige Zeit an der Józef Attila Universität in Szeged zu Gast und arbeitete mit der Gruppe von János Csirik zusammen. Von 2001 bis 2016 war Woeginger Professor in den Niederlanden, 2001-2004 an der Universität Twente, wo er die Arbeitsgruppe „Discrete Mathematics and Mathematical Programming“ leitete, und danach an der TU Eindhoven, wo er die Professur „Combinatorial Optimization“ innehatte. Das Sommersemester 2011 verbrachte Gerhard als Gastprofessor an der TU Graz und 2012/2013 war er Gastprofessor an der Humboldt Universität Berlin. 2016 folgte er dem Ruf an die RWTH Aachen und war dort bis zu seinem Tod Inhaber des Lehrstuhls „Informatik 1, Algorithmen und Komplexität“. 2020 weilte Gerhard Woeginger im Rahmen seines wohlverdienten Sabbaticals für einige Monate an der TU Graz. Leider wurde dieser Aufenthalt von der COVID19-Pandemie überschattet und verlief völlig anders als geplant.

Gerhard Woegingers Forschung wurde mehrfach durch bedeutende Wissenschaftspreise ausgezeichnet. 1996 erhielt er den höchstdotierten und anerkanntesten Wissenschaftspreis Österreichs für Forscher unter 35, den START-Preis. 2004 erhielt er den VICI-Preis der NWO (Niederländische Organisation für Wissenschaften) und 2011 einen Humboldt-Forschungspreis, der ihn als Gast an die TU Berlin zu Rolf Niedermeier führte, der wie es das Schicksal wollte, im März 2022 wenige Wochen vor Gerhard ebenfalls viel zu jung verstarb. Ferner war Gerhard seit 2004 Mitglied von Academia Europaea.

2 Der Forscher Gerhard Woeginger

Das wissenschaftliche Œvre Woegingers ist sehr umfang- und wirkungsreich. Google scholar listet 471 Publikationen mit über 20000 Zitierungen und MathSciNet 411 Publikationen aus 15 Fachbereichen (u.a. Operations Research, Mathematical Programming, theoretische Informatik, Spieltheorie, diskrete Geometrie, mathematische Logik und Zahlentheorie), mit über 2300 Zitierungen und 275 Koautoren. Einige Arbeiten, die unter Mitwirkung von Gerhard entstanden sind, befinden sich noch im Begutachtungsprozess oder im Manuskriptstatus.

Die Tiefe und Breite des wissenschaftlichen Werkes von Gerhard Woeginger kann man nicht adäquat in Zahlen erfassen. In diesem Nachruf möchten wir nur ein paar besondere Aspekte seines Werkes ansprechen. Die Komplexitätstheorie stellte einen besonderen thematischen Schwerpunkt in der wissenschaftlichen Arbeit von Gerhard Woeginger dar. Wir möchten hier insbesondere auf seine unzähligen Beiträge zur Komplexitätsanalyse von NP-schweren Problemen und deren effizient lösbaren Spezialfällen hinweisen. Das Interesse für die Trennlinie zwischen effizient lösbaren und NP-schweren Spezialfällen wurde schon in den 90er Jahren an der TU Graz geweckt als Woeginger, damals ein junger Universitätsassistent, Mitglied der Gruppe von Rainer Burkard war und eng mit Rainer Burkard und dessen Gästen und Doktoranden, darunter auch die Autorinnen dieses Nachrufs, zusammenarbeitete. Dieses Thema blieb bis zuletzt eine produktive Achse der Zusammenarbeit mit den Grazer Kollegen und mit Vladimir Deĭneko (Warwick), den Gerhard in Graz kennenlernte und der wie Gerhard auch in späteren Jahren Graz regelmäßig besuchte um gemeinsame Forschungsarbeiten durchzuführen.

Wenn man ein weiteres Themenfeld von Gerhard Woegingers Forschungstätigkeit besonders hervorheben möchte, dann wären das definitiv Algorithmen. Er leistete wichtige Beiträge zu exakten, approximativen, randomisierten und online Algorithmen. Die im INFORMS Journal on Computing erschienene Arbeit „When does a dynamic programming formulation gurantee the existence of a fully polynomial time approximation scheme (FPTAS)?“ zeigt eindrucksvoll, wie die Liebe zum Detail und der perspektivische Blick einander gegenseitig ergänzen. Wenn man nur eine Problemklasse erwähnen dürfte, die in Woegingers wissenschaftlichem Nachlass prominent vertreten ist, so würde die Wahl auf Scheduling Probleme fallen, denn ca. ein Fünftel von Woegingers wissenschaftlichen Publikationen beschäftigen sich mit dieser Thematik. Der Wirkungsgrad von Woegingers Arbeiten beruht nicht nur auf den wichtigen und schönen von ihm erzielten Resultaten, sondern auch auf den relevanten und richtungsweisenden offenen Fragen, die sich daraus ergaben und klar ausformuliert wurden. Exemplarisch sei hier auf die 1999 erschienene Arbeit „Polynomial time approximation schemes for machine scheduling: ten open problems“ verwiesen. Viele der in dieser Arbeit aufgelisteten offenen Fragen sind mittlerweile gelöst und die nicht-trivialen Lösungen sind in renommierten Fachzeitschriften publiziert worden.

Die oben speziell hervorgehobenen Forschungsthemen sind den Bereichen diskrete Mathematik, theoretische Informatik und Operations Research zugehörig. Nicht unerwähnt bleiben sollte an dieser Stelle, dass Gerhard auch Beiträge zu Themen aus den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften geleistet hat. Stellvertretend seien hier seine Arbeiten zu bibliometrischen Indices wie dem h-Index und dem von ihm vorgeschlagenen w-Index sowie seine Arbeiten im Bereich social choice erwähnt. Seine Expertise im Bereich diskrete Mathematik und theoretische Informatik kam ihm hier sehr zugute und führte dazu, dass er sich rasch in dieser Community einen Namen machte und zu Fachtagungen eingeladen wurde. Auch hier zeigte sich wieder seine Rolle als meisterhafter Brückenbauer zwischen verschiedenen Communitys.

In der Auswahl seiner Forschungsthemen war für Gerhard Ästhetik und persönliches Interesse vorrangig und nicht, ob ein Thema gerade in Mode oder besonders chancenreich für die Akquirierung von hohen Projektfördergeldern war. Das Forschen mit Gerhard war faszinierend und inspirierend, seine Perspektiven und Ansätze oft unkonventionell und breit einsetzbar. Der Blick auf das Ganze, das Erkennen globaler und kausaler Zusammenhänge, die weit über den Kontext einzelner Probleme und Fragestellungen hinauswirken, war Gerhard Woeginger sehr wichtig. Diese Blickerweiterung gelang ihm außergewöhnlich gut, wovon auch seine viel zitierten und in renommierten Fachzeitschriften erschienenen Überblicksartikel zeugen.

Woeginger war ein sehr geschätzter Vortragender sowohl auf Workshops und Fachtagungen zu speziellen Themen als auch auf großen Konferenzen, wo er nicht selten als Plenarvortragender eingeladen wurde. Auf der EURO Tagung 2018 in Valencia hielt er einen Plenarvortrag über den Nutzen komplexitätstheoretischer Erkenntnisse zur Lösbarkeit von klassischen und modernen Operations Research Problemen. Gerhard brillierte nicht nur mit seinem enzyklopädischen Wissen, sondern auch mit seiner einmaligen Fähigkeit die Reichweite und Tiefe einer komplexen Thematik so zu vermitteln, dass dies auch bei Nicht-Experten Interesse und Begeisterung auszulösen vermag, was ihm eindrucksvoll gelang, wie eine der Autorinnen dieses Nachrufs, die den Vortrag live vor Ort erlebte, bezeugen kann. Im Rahmen von Fachtagungen zu Spezialthemen wurden schon im Voraus mit Spannung seine klugen Fragen erwartet. Wenn am Ende eines Vortrags der Komplexitätsstatus eines Problems als offen genannt wurde, hatte Gerhard nicht selten einen Kommentar, einen Hinweis oder eine Literaturquelle parat, die zur Lösung der offenen Fragestellung beitrug. Oft bahnte sich in dieser Art und Weise die eine oder andere Kooperation an.

In der Wissenschaftsgemeinde war Gerhard Woeginger nicht nur als Autor von wissenschaftlichen Publikationen und als Vortragender auf Tagungen äußerst aktiv. Er war im Laufe seiner Karriere Mitglied des Herausgeberkomitees von mehr als 15 renommierten Fachzeitschriften (u.a. Mathematics of Operations Research, Journal of Computer and System Sciences, Operations Research Letters, Jour-

nal of Scheduling) sowie der bedeutenden Serie „Lecture Notes in Computer Science“. Er war Vorsitzender des Programmkomitees für viele wichtige internationale Fachtagungen wie z.B. ESA’1997, ICALP’2003, MAPSP’2005, EURO’2009, IPCO’2011, IPEC’2012. Darüber hinaus war er Co-Herausgeber etlicher viel zitierter Tagungsbänder (z.B. IPCO 1999, WG 2017) sowie mehrfach Organisator von renommierten internationalen Forschungsseminaren in Dagstuhl und Oberwolfach.

Nicht unerwähnt bleiben soll auch die Rolle von Gerhard Woeginger als Gutachter für zahlreiche Forschungsinstitutionen und -organisationen und seine Tätigkeit in zahlreichen inneruniversitären und externen Gremien. Exemplarisch seien hier seine Mitgliedschaft in Lenkungsausschüssen (z.B. ESA, IPEC, MAPSP) und Beiräten (z.B. Max Planck Institut für Informatik Saarbrücken, Centre for Discrete Mathematics and its Applications — DIMAP) und im Rat (Council) der EATCS (European Association for Theoretical Computer Science) genannt.

Im Rahmen dieses Nachrufs ist es uns nicht möglich eine auch nur annähernd repräsentative Auflistung der Dienste, die Woeginger der Wissenschaftsgemeinde in mehreren Fachgebieten erwiesen hat, vorzunehmen. Wie sehr er von der Community geschätzt wurde, zeigen auch die in memoriam Sonderhefte der Fachzeitschriften „Operations Research Letters“ und „Theory of Computing“, die Nachrufe der diversen Institute bei denen Woeginger während seiner wissenschaftlichen Karriere tätig war und ein von Jan Karel Lenstra, Franz Rendl, Frits Spieksma und Marc Uetz verfasster Nachruf, der in geringfügig angepasster Weise in den Journalen „Operations Research Letters“ und „Journal of Scheduling“ erschienen ist.

Berührend und überwältigend sind die Kondolenzbuchbeiträge von Kollegen, Koautoren, Doktoranden, Studierenden, Freunden und weiteren Personen, die mit Woeginger gearbeitet haben, ihn persönlich und/oder seine Arbeiten kannten. Das KondolenzBuch `https://blog.rwth-aachen.de/trauerbuchgw/2022/04/20/thoughts/` wurde von der RWTH Aachen aufgelegt.

Auch die Tatsache, dass Delegationen aus Aachen und den Niederlanden sowie sechs Personen aus dem Umfeld der österreichischen Mathematik Olympiade (vom Vorbereitungsworkshop in Raach kommend bzw. dieses unterbrechend), zum Begräbnis von Gerhard am 23. Mai 2022 am Zentralfriedhof in Graz anreisten, spricht für sich.

3 Persönliches

Gerhard Woeginger war außergewöhnlich, als Wissenschaftler und als Mensch und es ist schier unmöglich alle Facetten seiner Persönlichkeit zu beleuchten. Im Folgenden werden wir einige dieser Facetten subjektiv reflektieren.

In seiner wissenschaftlichen Arbeit waren die *Klarheit und Eleganz seiner Argumente* faszinierend. Gerhard gab sich nicht mit einem korrekten Beweis oder Algorithmus zufrieden, Klarheit und Eleganz waren für ihn genauso wichtig wie die Korrektheit. Diesbezüglich war er ein Perfektionist. Die *Tiefgründigkeit seines Denkens* war imponierend. Er suchte und fand Zusammenhänge wo andere sie nicht vermuten würden, auch jenseits der Grenzen des eigenen Forschungsgebietes. Nach jeder erarbeiteten Antwort identifizierte er die nächsten relevanten Fragen und war in der Lage diese klar zu formulieren. Seine *mathematische Neugier* war mitreißend. Wenn es mehrere Abhandlungen über ein Thema gab, war es ihm wichtig alle kennenzulernen. Er kannte Publikationen aus dem Prä-Computer-Zeitalter, auch solche, die im sogenannten Westen nicht bekannt waren, und suchte ggf. nach Möglichkeiten diese übersetzen zu lassen.

Gerhard Woeginger konnte *aufgeschlossen und geduldig zuhören*. Er war in der Lage wie kaum ein anderer aus vielen unstrukturierten Ideen die Essenz zu destillieren. Dies tat er in einer natürlichen und unauffallenden Art und Weise. Nach einer langen Diskussion stürmte er manchmal am nächsten Tag in das Büro und rief triumphierend „Ich glaube Du hattest gestern die Lösung des Problems“. Nicht nur einmal schrieb er nach einem intensiven Ideenaustausch die an der Tafel schematisch skizzierten Beweise über das Wochenende so gut strukturiert zusammen, dass der Weg von diesen Notizen zu einem vollständigen Manuskript, das bei einem Journal oder einer Konferenz eingereicht werden konnte, nicht mehr lang war.

Mit seiner zugänglichen und aufgeschlossenen Art, mit seinem typischen subtilen Humor, war Woeginger auch außerhalb der Konferenzräume, in Kaffeepausen und im Rahmen von sozialen Aktivitäten ein beliebter Gesprächspartner. Es fiel ihm leicht neue Kontakte in der Wissenschaftsgemeinde zu knüpfen. Aufgrund seiner vielfältigen Interessen und seiner Belesenheit konnte er sich mit Menschen unterschiedlichen Alters und Hintergrunds über die verschiedensten Gesprächsthemen von Literatur und Filmen, über Fußball und Computer- und Gesellschaftsspiele bis zu Geschichte und Politik, unterhalten. Es gab allerdings ein Thema über das er offenkundig nicht so gerne sprach, nämlich seine eigene Person. Von seiner schweren Krankheit wussten nur wenige und auch diese wussten wenig, was den Schock anläßlich seines Todes noch vergrößerte.

Unabhängig davon ob er mit einem berühmten Professor, einer vielversprechenden Preisträgerin, mit einer jungen Studentin oder einem neuen Postdoc kommunizierte, er hörte stets interessiert zu und war ehrlich und nie überheblich oder anmaßend. Aus einigen Bekanntschaften entwickelten sich Freundschaften, die ihm viel bedeuteten. Wenn es die Gelegenheit zu sozialisieren gab, bei Konferenzen, Forschungsseminaren oder anderen Events, genoss er sichtlich die Zeit mit seinen Freunden, meistens war er einer der letzten, die eine gesellige Runde verließen. Umso schwerer waren für ihn jene Lebensphasen, in denen er nicht reisen konnte und wohl auch mitunter ziemlich einsam war. Dies traf insbesondere

auf die Rekonvaleszenz-Zeit nach seinem schweren Fahrradunfall 2007 und seine letzten Lebensmonate zu.

Gerhard war neugierig und immer an einem Blick über den Tellerrand interessiert, nicht nur als Wissenschaftler. In gewisser Weise vereinte er die Wesenszüge eines kleinen Kindes und eines weisen Mannes, jeweils in positiver Weise, in sich. In den neunziger Jahren als Woeginger in Graz war, hatte die Gruppe um Rainer Burkard oft ausländische Gäste, auch aus (damals) nicht „westlichen“ Ländern, etwa aus Ungarn, Russland, China oder Vietnam. Bei gemeinsamen Essen oder Kaffeepausen stellte Gerhard Fragen über das politische und gesellschaftliche System in diesen Ländern, insbesondere auch über das Bildungssystem und die Wissenschaftspolitik. In Diskussionen zeigte er stets Verständnis für die Position der Schwächeren und offenbarte eine große Affinität für Fairness. Anfang der 2000-er Jahre, als das Thema der unverhältnismäßig hohen Preise und exorbitanten Gewinne mancher wissenschaftlichen Verlage aufkam, engagierte sich Woeginger für die „open access policy“, unterschrieb entsprechende Petitionen und verlinkte wichtige Diskussionsbeiträge auf seiner Webseite an der TU Eindhoven. Im Jahr 2017 unterschrieb er den offenen Brief der START-Preisträger an die Bundesregierung zu den Themen Universitätsfinanzierung und „Forschungsmilliarde“.

Gerhard Woeginger war im positiven Sinne unkonventionell und schloss sich nicht irgendwelchen Trends an, nur weil das die Mehrheit tat. Während er in seiner Forschung stets am Strom der Zeit der Entwicklungen war oder seiner Zeit voraus, so war er im privaten Kontext nicht jeder modernen Errungenschaft gegenüber bedingungslos positiv eingestellt. Bis zu seinem letzten Lebensjahr, als ihn häufige Spitalsaufenthalte zu einer Änderung zwangen, besaß er kein Smartphone (die gewonnene Zeit investierte er lieber in Forschung und seine Hobbys wie Lesen). Die Tatsache, dass er jahrelang nicht einmal auf Reisen zumindest ein einfaches Mobiltelefon mit Wertkarte mit sich führte, brachte einige anekdotische Erlebnisse mit sich, die die zweite Autorin in der Kommunikation mit Gerhard erlebt hat, wenn sich auf seiner Anreise nach Graz relevante Verzögerungen ergeben haben (was nicht so selten der Fall war, insbesondere bei seinen Anreisen vor Weihnachten). Gerhard war in solchen Situationen darauf angewiesen, dass ihm hilfsbereite Personen kurzfristig ihr Telefon borgen oder für ihn Anrufe erledigen und wenn die Kommunikation zwischendrin abbrach, war es schwierig eine Fortsetzung zu initiieren. Gerhard trug keine Armbanduhr und schaffte es dennoch Termine einzuhalten. Gerhard hatte eine Vorliebe für bequeme Freizeitkleidung und -schuhe. Viele Kollegen werden ein Bild von ihm im Kopf haben, wo er mit einem einfärbigen T-Shirt und einer Stoffhose bekleidet ist, Bequemschuhe oder Birkenstock-Sandalen trägt und verschmitzt lächelt.

4 Der akademische Lehrer Gerhard Woeginger

Gerhard Woeginger hat im Rahmen seiner Karriere Lehrveranstaltungen an fünf verschiedenen Universitäten in drei Ländern für alle Ebenen von Studierenden (Bachelor, Master und Doktorat) und unterschiedlichste Studienrichtungen abgehalten.

Gerhard Woeginger war ein passionierter Universitätslehrer. Er war von der Wichtigkeit eines motivierenden und inspirierenden Unterrichts überzeugt und gab sein Bestes in der Unterstützung des wissenschaftlichen Nachwuchses auf allen Ebenen, von den Studienanfängern bis zu den Doktoranden. Seine Lehrveranstaltungen waren nie langweilig — er verstand es meisterhaft im Rahmen eines anspruchsvollen mathematischen Kontextes passende Inhalte zur Steigerung der Aufmerksamkeit, zur Auflockerung oder zur Veranschaulichung, wie etwa ein geschichtliches Narrativ, ein Puzzle oder einen Cartoon in seinen Vortrag einzubauen.

Seine letzte Lehrveranstaltung in Graz war eine völlig neu konzipierte Vorlesung zum Thema „Computational Social Choice“, die er im Sommersemester 2020 halten sollte und auf die sich viele, und auch die beiden Autorinnen dieses Artikels, bereits sehr gefreut hatten. Leider musste die Vorlesung aufgrund der COVID19-Pandemie nach zwei Vorlesungseinheiten abgesagt werden; für Gerhard Woeginger kam bei dieser sehr auf Interaktion abgestimmten Lehrveranstaltung eine online Abhaltung nicht in Frage. Die erste Vorlesungseinheit Anfang März hätte auch gleich als Lehrstunde in Geschichte und politischer Bildung herangezogen werden können. Im bis auf den letzten Platz gefüllten Seminarraum wurde neben mathematischen Problemstellungen eine geschichtliche und geographische Tour durch diverse politische Wahlsysteme seit der Antike präsentiert.

Gerhard machte sich Gedanken über die Lehre im Großen, über den Modus der Abhaltung diverser Lehrveranstaltungen und Prüfungen, und war auch hier stets bemüht in Austausch mit Kollegen von unterschiedlichen Universitäten und aus unterschiedlichen Ländern zu treten und aus den positiven aber auch negativen Erfahrungen anderer zu lernen.

Gerhard war auch im Umgang mit Studierenden unkonventionell, er mochte keine Hierarchien, seine Kommunikation mit Studierenden erfolgte ganz natürlich „auf Augenhöhe“ (in Zeiten als dieser Begriff noch kein Modewort war). Er hatte keine Starallüren und nahm sich selbst nie sehr wichtig. Das schaffte Vertrauen und verkürzte die Distanz. Exemplarisch möchten wir aus dem Beitrag eines Studenten im Trauerbuch für Gerhard Woeginger zitieren „As a student, Gerhard’s survey on exact algorithms for NP hard problems had a profound effect on me. He saw that I had managed to get a paper accepted to SODA on exact algorithms, and he emailed me out of the blue with a draft of the survey, requesting my comments. I remember feeling shocked that a professor would ask for my opinions on his paper“. Als Lehrer wurde er nicht nur für sein Wissen und Können geschätzt,

sondern auch für seine menschliche und gewinnende Art gemocht.

Gerhard Woeginger hat in seiner Karriere ca. 20 Dissertationen betreut. Ferner nahm er für viele weitere Doktoranden (und auch Postdoktoranden) die Rolle als informeller Ko-Betreuer oder Mentor ein, was auch immer gerade gebraucht wurde. Dies können die beiden Autorinnen auch aus eigener Erfahrung bezeugen.

5 Mathematische Wettbewerbe, Nachwuchsförderung

Für Gerhard Woeginger war es sowohl eine Passion mathematische Aufgaben und Rätsel zu erstellen als auch von anderen kreierte ebensolche zu lösen. Diese Liebe zeigte sich früh und auch außerhalb seiner wissenschaftlichen Tätigkeit und begleitete ihn bis zum Lebensende. Eine der Autorinnen erinnert sich noch lebhaft daran, mit welcher Begeisterung Gerhard jedes Jahr auf die Veröffentlichung der IMO Aufgaben wartete und dann alles andere stehen und liegen ließ, um sich deren Lösung zu widmen und im Anschluss seine Freude über schöne Aufgaben und elegante Lösungsansätze mit anderen zu teilen.

Bereits in seiner Schulzeit kam Gerhard mit der österreichischen Mathematik-Olympiade in Kontakt und gewann 1981 und 1982 Medaillen beim Bundeswettbewerb in Raach. 1981 vertrat er Österreich bei der internationalen Mathematik Olympiade (IMO) in Washington, wo er auch auf zwei spätere Koautoren Yossi Azar (Tel Aviv) und Jiří Sgall (Prag) traf.

Über Jahre reichte er unzählige Aufgabenvorschläge für diverse nationale (u.a. in Österreich und den Niederlanden) und internationale Mathematik-Wettbewerbe (IMO, Mediterranean Mathematics Competition) ein. Auf allen erwähnten Ebenen schaffte er es wiederholt, dass von ihm vorgeschlagene Aufgaben als Bewerbsaufgaben ausgewählt wurden. Erwähnenswert ist ferner, dass er IMO Aufgaben für mehrere Länder (Österreich, Deutschland, Niederlande, Luxemburg, vielleicht auch weitere) vorgeschlagen hat. Exemplarisch sei die anspruchsvolle Aufgabe 3 der IMO 2017 (der Jäger und der unsichtbare Hase) genannt.

Mit seinem typischen Blick für das Ganze analysierte er auch in diesem Bereich seiner Tätigkeit Zusammenhänge und vereinheitlichte Lösungswege, wie etwa in seinem Beitrag „Zwei Fliegen und eine Klappe“, der in den Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung (*Mitt. DMV* 23/2015, 136-138) erschien und eine einheitliche Lösung zweier Aufgaben aus der IMO 2014 bzw. dem Mathe Adventskalender 2014 präsentierte. Die genaue Anzahl der von Gerhard insgesamt erstellten Aufgabenvorschläge lässt sich nicht eruieren, es dürfte sich jedenfalls um mehr als 200 handeln. 26 von Gerhard erstellte Aufgaben wurden aus Anlass der Gedenkveranstaltung für Gerhard, die am 7. Oktober 2022 an der RWTH Aachen stattfand, in einem kleinen Büchlein mit dem Titel “A Gerhardian Puzzle

Book” zusammengestellt. Diese Aufgaben und die zugehörigen Lösungen wurden unter dem Titel „A Gerhardian Puzzle Book for Advent – In Memoriam Dr. Gerhard Woeginger, 1964–2022“ von der deutschen Gesellschaft für Operations Research (GOR) in der OR News Ausgabe vom Dezember 2022 veröffentlicht.

Neben seiner Rolle als engagierter Einreicher von Aufgabenvorschlägen wirkte Gerhard Woeginger für die IMO auch in einer Reihe anderer Funktionen, von denen hier nur exemplarisch einige erwähnt seien: Observer (für die Niederlande, 2009 und 2010), Mitglied des Problem Selection Commitee und Mitglied des nationalen Betreuungsteams (u.a. 2020 für das österreichische Team im Rahmen der aufgrund von COVID19 virtuell abgehaltenen IMO). Bedingt durch seinen Umzug nach Aachen plante Gerhard sich im Rahmen des IMO Trainings in Deutschland zu engagieren. Leider durchkreuzte auch hier der Tod seine Pläne und es kam nur mehr zu einem Kurs über Graphentheorie im Mai 2021.

Ein weiteres Herzensprojekt von Gerhard Woeginger war der „Digitale Mathematische Adventskalender“ (mittlerweile als MATH+ Adventskalender bekannt), der 2003 von Matheon (ab 2020 Exzellenzcluster MATH+) initiiert wurde und ab dem Jahr 2010 in Zusammenarbeit mit den niederländischen technischen Universitäten (vormals 3TU.AMI, mittlerweile 4TU.AMI) betrieben wird. Als Mitglied des niederländischen Teams hat Gerhard regelmäßig zahlreiche Aufgaben beigetragen und an der Zusammenstellung von Lösungsheften mitgewirkt. Er setzte sich auch „privat“ für die Nachwuchsförderung ein und versorgte Freunde und Kollegen mit Kindern, bei denen er ein Interesse für Mathematik vermutete, u.a. mit Knobelaufgaben und Anregungen zu didaktisch wertvollen Computerspielen mit mathematischem Inhalt.

Wir trauern um einen großartigen Wissenschaftler und akademischen Lehrer, Freund, Mentor, Koautor und Kooperationspartner, dem wir unermesslich viel verdanken. Er hat diese Welt viel zu früh verlassen, er hätte der Wissenschaft noch viel zu geben gehabt. Wir werden nie aufhören ihn zu vermissen.

Adresse der Autorinnen:
TU Graz, Institut für Diskrete Mathematik, Steyrergasse 30/II, A-8010 Graz
email cela@math.tugraz.at,klinz@math.tugraz.at

Buchbesprechungen

S. Sullivant: Algebraic Statistics (GÜNTER PILZ) 45
H. Alencar, W. Santos, G.S. Neto: Differential Geometry of Plane Curves (FLORIAN PAUSINGER) 46
B. Bollobás: The Art of Mathematics – Take Two (DANIEL HOLMES) . . 47

S. Sullivant: Algebraic Statistics. (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 194.) American Mathematical Society, Providence (USA), 2018, 490 S. ISBN 978-1-4704-3517-2 H/b $ 83.

For a long time, it was widely assumed that the only connection between statistics and algebra was the one via σ-algebras. But this has changed substantially since the beginning of this century, when the connections between statistics and algebraic geometry gained a lot of attention. As an example, take the density function of the binomial distribution which gives the probability $\phi_i(\theta)$ of getting i "successes" in tossing a coin in r trials with a success rate of θ. The vector θ of all $\phi_i(\theta)$ as the i-th component gives a map ϕ from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}^{r+1}$. If one changes from $\mathbb{R}$ to the algebraically closed field $\mathbb{C}$, one gets $\phi(\mathbb{C})$ as a curve in $\mathbb{C}^{r+1}$, parameterized by θ, which is an algebraic variety, and one is in algebraic geometry. The author starts with primers in probability theory, algebraic geometry, and statistics, before extensively exploring the connections between statistics and algebraic geometry, including, for example, the design of experiments and phylogenetic models in biology. So statistical models become semialgebraic sets, maximum likelihood estimations translate to polynomial optimizations, etc. This book is a shining example of interdisciplinary research!

G. Pilz (Linz)

H. Alencar, W. Santos, G.S. Neto: Differential Geometry of Plane Curves. (Student Mathematical Library Vol. 96.) American Mathematical Society, 2022, 416 S. ISBN 978-1-4704-6959-7 S/b $ 59.

Dieses sehr übersichtlich geschriebene Lehrbuch befasst sich mit der Theorie der ebenen Kurven. Wie die Autoren bereits im Vorwort schreiben, beschränken sie sich auf ebene Kurven um viele interessante Resultate der Differentialgeometrie auf möglichst intuitive und elementare Weise darstellen zu können. Das Ergebnis ist ein sehr gelungenes Buch, das man interessierten Studenten bedenkenlos zum Selbststudium empfehlen oder als Grundlage für eine zwei semestrige Spezialvorlesung im Bachleorstudium verwenden kann.

Dabei bietet das umfangreiche erste Kapitel eine gute Basis für eine Spezialvorlesung und beinhaltet alle wichtigen Konzepte aus der Theorie der ebenen Kurven. Insbesondere werden Umparametrisierungen nach Bogenlänge, Normal- und Tangentialfelder, die Frenet Gleichungen, sowie Krümmung und der Hauptsatz ebener Kurven diskutiert. Darüberhinaus gibt es noch einen Abschnitt über Parallelkurven, Involuten und Evoluten. Abgerundet wird das Kapitel mit über 40 Übungsaufgaben für die teilweise Lösungen vorhanden sind.

Das zweite Kapital beschäftigt sich ausführlich mit der Theorie der Windungszahl (winding number). Als Hauptergebnis wird der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen. Im dritten Kapitel wird der Rotationsindex untersucht bevor sich das vierte und fünfte Kapitel fundamentalen Eigenschaften ebener Kurven widmen. Im vierten Kapitel wird der Jordansche Kurvensatz für reguläre C^2 Kurven bewiesen und es werden Referenzen zum Beweis der allgemeinen Version für stetige Kurven gegeben. Darauf aufbauend beinhaltet das fünfte Kapitel dann einen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für reguläre Kurven sowie für stückweise C^1 Kurven.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich ausführlich mit der Theorie der konvexen Kurven. Als Hauptresultat wird der Rosenthal-Szasz Satz bewiesen, i.e., unter allen Kurven die geschlossen, regulär, konvex und simpel mit Durchmesser D sind, haben die Kurven konstanter Breite (curves of constant width) die größte Länge.

Das siebte Kapitel baut auf dem Hauptsatz ebener Kurven auf und beinhaltet einen historischen Überblick, einen Beweis des Vierscheitelsatzes (Four-Vertex Theorem) sowie einen Beweis der Verallgemeinerung von Osserman. Darüberhinaus wird die Umkehrung des Vierscheitelsatzes von Gluck und Dahlberg vorgestellt (aber nicht bewiesen).

Das letzte Kapitel eignet sich als Grundlage für ein Seminar und verknüpft die vorgestellte Theorie mit aktuellen Forschungsergebnissen. Konkret wird die Theorie der curve-shortening flows vorgestellt und es werden wichtige Sätze von Gage, Hamilton und Grayson diskutiert und bewiesen.

Ein positiver Aspekt dieses sehr empfehlenswerten Buches ist, dass die Auto-

ren immer versuchen elegante und einfache Beweise bereitzustellen. Oftmals gibt es zwei oder mehr Referenzen für ein Ergebnis, wobei eine Referenz immer zur Originalarbeit führt und die weiteren zu späteren Arbeiten mit vereinfachten Beweisen. Das Buch ist auf jeden Fall ein guter Startpunkt für das Studium ebener Kurven und eine gute Referenz für eine Spezialvorlesung.

F. Pausinger (Belfast)

B. Bollobás: The Art of Mathematics – Take Two. Tea Time in Cambridge. Cambridge University Press, 2022, 348 S. ISBN 978-1-1089-7826-2 H/b £19,99.

This book is a beautiful collection of 128 elementary mathematical problems covering combinatorics, number theory, geometry, algebra, and basic analysis. For every problem, at least one solution is provided and most of them are equipped with references for further reading and historical remarks. These reward the reader with amusing anecdotes and lively illustrations of how mathematical chestnuts are passed on between generations, often orbitting around the *Hungarian school of mathematics*, prominently represented by Paul Erdős, and the Cambridge tradition of the *Mathematical Tripos*.

Highlights include three different solutions to the Basel problem ($\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$) by Euler and Erdős, Fermat's last theorem for exponent 4, Erdős' elementary proof of Bertrand's postulate, many special cases of Catalan's conjecture (which says that $x^a - y^b = 1$ has only one integer solution for $a, b > 1$ and $x, y > 0$, namely $3^2 - 2^3 = 1$), the Moving Sofa problem, Gambler's ruin, Vieta jumping, three proofs of the Graham-Pollak theorem (which says that the edges of a complete graph K_n cannot be partitioned into less than $n-1$ complete bipartite graphs), and a joke problem that can be solved by appealing to the non-existence of a perpetuum mobile.

No higher mathematical education is required to enjoy the contents of this book. At the same time, professional mathematicians will appreciate it for its cultural value and containing many problems suitable for admission interviews and olympiad trainings.

In conclusion, I recommend this book to anybody who enjoys a good mathematical riddle. 159 further problems can be found in the prequel *Coffee Time in Memphis* (2006) by the same author, and liking one of these two books is (almost surely) equivalent to liking both.

D. Holmes (ISTA)

Women in Mathematics

Interview with Elisa Davoli

Elisa Davoli was born in Italy. She is married with one daughter. She did her Bachelor in Computer Engineering and Automation and her Master in Mathematics. She completed her PhD in SISSA/ISAS in 2012 in Applied Mathematics. Afterwards, she was first a Postdoc at Carnegie Mellon University (Pittsburgh, USA), and then at the University of Vienna. Since 2022 Elisa Davoli is full professor at TU Wien.

Photo credit to Luiza Puiu

After studying Computer Engineering and Automation, you obtained a Master and PhD degree in Mathematics. Why did you change the field of study? How does the bachelor degree in engineering influence your current research or your academic life?

I always liked Mathematics and actually in the High School I was involved with the Mathematics Olympiads in Italy at the National level but somehow I had the feeling that Mathematics was something for "geniuses" and not for "normal people" and I did not consider myself a genius, so I opted for Engineering which seemed a far more suited choice. On top of that, there was no Mathematics University

in my home town but there was a very good Engineering University instead. What prompted me to change my path was a combination of different factors. While at the beginning my Engineering studies were still very abstract (I had Analysis classes, Physics classes, and Programming classes), after a while they started to become more and more technical. I had top grades in all technical subjects but I was finding them boring: somehow to me it was more interesting to understand "why" things would work in a certain way rather than "how" they would work, and the models we were provided with seemed often not very rigorous and a bit too approximate or "out of the blue" for my taste. I was attracted by Math instead because everything there was clear and well justified instead. The second, key reason, for me to switch to Mathematics for my master was that I had a great Analysis 1 professor, who encouraged me to pursue what I really liked and gave me some advice in terms of books to read to fill my knowledge gaps and be able to compete with fellow bachelor graduates for one of the six yearly awarded joint fellowships between the University of Trieste and SISSA (ISAS). The fact that the selection committee decided to give me a chance and awarded me one of the fellowships started my path as a Mathematician.

I think my bachelor degree in Engineering helps me sometimes to gain an intuition for the physics behind the mathematical problems I study, and it always made me "not afraid to getting my hands dirty with long computations", if needed :-).

How would you explain your favorite research topic to mathematicians who are not necessarily experts in the field?

One topic I very much like is the variational analysis of mixed Eulerian-Lagrangean energies. To clarify the problem, let us focus for example on the setting of magnetoelasticity and let us call O a specimen of our magnetoelastic material. Here the focus is on characterizing the existence of minimizers and their behavior with respect to some given parameters for energy functionals of the form $E(y,m)$, where y is an elastic deformation of the body and m denotes its magnetization. These kind of functionals involve both "classical" variational contribution defined on the reference configuration O, as well as more "unusual" further contribution defined on the deformed set $y(O)$. The challenging point here is that even if the admissible deformations y are very regular, the deformed sets $y(O)$ can have a very complicated geometry, with holes inside, or parts which self-interpenetrate or extremely irregular boundaries, and their geometry might not be stable with respect to limit passages. Therefore new techniques are needed to deal with these kind of situations.

You were awarded the FWF START prize, the Richard von Mises prizes of the GAMM, as well as the Elise Richter fellowship. In the most innovative part of your research, do you pursue entirely new research avenues or do you find innovative approaches for relatively well-known problems, or something else?

The most innovative part of my research is motivated by current problems stemming from materials science, physics, applied chemistry, or imaging, which I stu-

dy with variational techniques. Very often, therefore, from a mathematical point of view they require the development of new techniques.

As a recipient of a "Faculty Teaching Award" from the University of Vienna, you also seem to be a great academic teacher. Can you shortly tell us about your teaching concept?

Here are my "golden rules" which I always try to apply in my classes:

- Be prepared: organize in advance the material for the classes and think about how to explain it to students. Prepare extra material for students who are willing to know more. Provide examples and applications. Think in advance to the organization of the material on the blackboard. Have a timeline at hands showing how the material will be developed. Work out all the details of the proofs and double-check all the results.

- Be aware of the blind spots: everything is easy once we have seen it a few times and thought about it, but for a student any new theorem or idea can be a challenge. Be clear and direct to the point. Try not to skip details, and/or be ready to provide them. Show students that they have all the tools to really grasp the material and understand it.

- Look for feedbacks: try to encourage students to interact and participate to the lectures, ask questions. If the students seem puzzled, repeat key concepts and slow down.

- Make it interesting: provide graphical examples, ideas, and schemes, when possible. Always make the students aware of where we are headed and how we are going to reach a certain result.

- Be available: always arrive a few minutes before classes and wait a few minutes afterward for students who might have questions. Stress the fact that questions are welcome. Allow students to meet outside classes for extra clarifications.

What were the most important things you learned from your mentors along your career? What about your role as a mentor?

I had the luck to have very different mentors along my career, with extremely different styles and personalities. I think the most important things I learned from them are to be prepared to go out of your comfort zone if needed, i.e. not to be afraid to ask questions, or go and talk to colleagues. I was very shy as a Phd student but I slowly learnt how to overcome this and found it very helpful to discuss with fellow researchers, develop joint projects and start new collaborations. I believe my mentorship style is a combination of those of all the mentors I had. As a mentor I try to be at the same time "present" but not "too present", meaning that on the one hand I try to be accessible to my mentees: all students and postdocs in my group

know that they can come and knock at my door if they have a problem, or send me an email, and that sooner or later I will find the time to talk to them. On the other hand, I try to let young researchers grow on their own, always encouraging them to try and find their solutions and only come to me if that does not work or if they wish to discuss their thoughts.

How do you deal with stressful situations in your career?

First of all, joking about them. If you can laugh about a problem, it gets way smaller than it was at the very beginning. Second, if possible, I take some time and space distance from the stressful situation in order to be able to look at it with a clear mind and not to make mistakes acting on an impulse. Third, I remember it is just work. I always keep a good portion of my time dedicated to family and friends and this allows me to put things more in perspective and not too get too overwhelmed with stressful work situations.

The number of students who want to study mathematics seems to be decreasing, also globally. Have you been involved in outreach activities to attract high school graduates to study mathematics? What kind of activities could work, in your opinion?

I have taken part in some outreach activities for high schools: for example during my Phd I taught a little course in a high school in Trieste to help the students prepare for the local and national phases of the Mathematics Olympiads. I also once joined for the European Night of Researchers in Trieste and held a stand with Mathematics riddles around the notion of "Infinity" and about how solving a Rubik's cube has to do with group theory. I believe all kinds of activities showing how Mathematics can be fun and interesting can work and motivate students to pursue a study in Mathematics. A further direction which I find very important is to show that Mathematics graduates are not some kind of weird people sitting on their desks and doing computations all the time but rather normal people with normal, and very different jobs, ranging from Academia to Industry, Teaching, Data Science, Research Management, etc, etc, etc.

You have considerable experience in working with international early career researchers. Are these collaborations organized differently, depending on the gender of the person? Regarding students, did you experience differences in working with female and male students?

I would not say that my collaborations are organized differently according to the gender of the persons but rather according to the persons themselves. In my experience, Master students, Phd students, and Postdocs can have very different personalities and I always try to adjust my mentorship style to the person I have in front of me. If a young researcher is already very autonomous, prefers to think on the project by themself and only meet with me once their ideas are bit clearer, I give them more space, try not to arrange too dense meetings, and rather wait for the person to ask me for one. If, on the other end, the young colleague I am wor-

king with is more inexperienced or insecure, or simply more in need of someone to “bounce ideas with” then I meet with them more often, even on a one-week basis, until we reach some progress on the problem we are working with. Also regarding students, I did not experience particular differences according to whether the student was female or male: every student I have had so far has been special in their own way and it has been a pleasure to grow as a mentor by supervising them.

Interview organized by Sylvia Frühwirth-Schnatter (Vienna University of Economics and Business) and Elena Resmerita (University of Klagenfurt).

Nachrichten der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft

Hans Czermak 1942–2023

Am 20. August 2023 ist Hans Czermak von uns gegangen. Es sei mir gestattet, einige persönliche Notizen zu meinem liebenswerten und auf sympathische Weise unauffälligen Freund niederzuschreiben. Seine wissenschaftlichen Interessen waren Logik, Grundlagenforschung und Philosophie. Mit der Dissertation an der Universität Wien mit dem Thema „Die Induktion in der Mathematik“ promovierte er 1967 und wurde zunächst Vertragsassistent am neu errichteten Institut für Logistik in Wien. Es folgten einige Jahre bei Professor Schütte in München und sodann am Internationalen Forschungszentrum in Salzburg. Im September 1976 habilitierte er sich an der Universität Salzburg für „Logik und Grundlagen der Mathematik“. Da das Internationale Forschungszentrum als kirchliche Institution mit chronischem Ressourcenmangel zu kämpfen hatte, nahm Hans im Jahre 1977 eine Gelegenheit wahr, an das Mathematische Institut der Universität Salzburg zu wechseln. Hans, am 14. April in Winterberg (heute Vimperk in Tschechien) 1942 geboren, erhielt – obwohl kein Opernstar – in diesem Jahr auch die österreichische Staatsbürgerschaft. Im Jahre 1982 wurde er zum Außerordentlichen Universitätsprofessor ernannt und trat im Jahre 2007 in den Ruhestand.

Soweit man dies als Kollege beurteilen kann, war Hans durch seine zahlreichen Lehrveranstaltungen bei den Studierenden sehr angesehen. Neben mathematischen Vorlesungen (im engeren Sinn) widmete er sich auch der Geschichte der Mathematik. Diese ist oft mindestens so schwierig wie die Entdeckung neuer Ergebnisse, denn viele ältere Arbeiten sind durch die Sprache und andere Bezeichnungen nicht leicht zu interpretieren. Dass er auch am Institut für Philosophie regelmäßig gelehrt hat, soll nicht unerwähnt bleiben. Bei den Studierenden besonders beliebt waren die Blockseminare, die er in Mittersill am Rande der Hohen Tauern abhielt. Seine wissenschaftlichen Leistungen werden wohl von fachkundigeren Kollegen und Kolleginnen gewürdigt werden, aber ich war von seiner Vertrautheit mit dem Werk von Wittgenstein und Gödel stets beeindruckt.

Die Berge waren seine Leidenschaft! Mich den Flachländer, der wohl das Bergpanorama liebte, aber meinte, dass Murmeltiere und Steinböcke für die Alpen besser ausgestattet seien, hat er überredet, den Untersberg (ca. 2000 Meter hoch) zu Fuß zu besteigen. Ich danke ihm für dieses einmalige Erlebnis.

Für Jahrzehnte treuer Freundschaft sei ihm herzlichst gedankt. Seinen Hinterbliebenen sei die tief empfundene Anteilnahme ausgesprochen.

(Fritz Schweiger)

Martin Aigner 1942–2023

Am 11.08.2023 ist Martin Aigner, emeritierter Professor der FU Berlin, im 82. Lebensjahr verstorben. Prof. Dr. Martin Aigner wurde am 28.02.1942 in Linz geboren und studierte Mathematik, Physik und Philosophie an der Universität Wien. Nach Jahren als Postdoc an der University of North Carolina in Chappel Hill sowie am MIT habilitierte sich Martin Aigner an der Universität Tübingen. Im Alter von 31 Jahren wurde er an die FU Berlin berufen. Zu seinen Hauptforschungsgebieten gehörten die algebraische Kombinatorik, Graphentheorie und die kombinatorische Suchtheorie. Er ist bekannt für zahlreiche Bücher, nicht zuletzt für das gemeinsam mit Günter Ziegler verasste Buch *Proofs from The Book*. Martin Aigner war seit 1997 korrespondierendes Mitglied der Österreichischen Akademie der Wissenschaften und seit 1999 ordentliches Mitglied der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. Prof. Aigner war seit 1982 Mitglied der ÖMG.

Protokoll der Generalversammlung der ÖMG am 22.09.2023 in Graz

Zeit: Freitag, 22. September 2023, 17:00–18:00 Uhr
Ort: Hörsaal 12.01 der Universität Graz, Universitätsstr. 2–4, 8010 Graz

Tagesordnung:

1. Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit
2. Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder
3. Bericht des Rechnungsprüfers und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands
4. Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen
5. Wahlen: Vorstand und Rechnungsprüfer:innen
6. Festlegung des Mitgliedsbeitrags für die Folgejahre
7. Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG
8. Allfälliges

TOP 1.

Begrüßung und Feststellung der Beschlussfähigkeit

Der Vorsitzende Johannes Wallner begrüßt die Anwesenden und stellt die Beschlussfähigkeit fest.

TOP 2.

Berichte des Vorsitzenden, des Kassiers und weiterer Vorstandsmitglieder

J. Wallner berichtet, dass die ÖMG derzeit 351 Mitglieder im Inland, 51 Mitglieder im Ausland und 5 Ehrenmitglieder hat. Im laufenden Kalenderjahr kamen 30 Neumitglieder dazu. Nachdem einige Neueintretende mit 1-jährigen Gratismitgliedschaften angeworben wurden, stellt sich die Frage nach Anzahl der Mitgliedschaften, die alljährlich durch Nichtbezahlung des Mitgliedsbeitrags ruhend gestellt wird. Diese Anzahl wird von C. Heuberger als ca. 20 pro Jahr ermittelt und ist relativ stabil, genauso wie auch die Mitgliederzahl insgesamt.

Der stellvertretende Kassier Daniel Smertnig berichtet über das Kalenderjahr 2022. Einnahmen von € 21.700,– standen Ausgaben von € 47.000,– gegenüber. Der Hauptteil des Verlustes ist eine Kurswertkorrektur von ca. € 10.600,–, dazu kommen € 4.000,– für die Mitteilungen der DMV und allgemein erhöhte Ausgaben für Druck und Versand. Die Einnahmen durch Mitgliedsbeiträge betragen ca. € 12.000,–. Für das laufende Kalenderjahr wird, ohne die Tagung zu berücksichtigen, ein Verlust von bis zu € 10.000,– erwartet.

Er berichtet weiter von Maßnahmen, die der Vorstand gesetzt hat, um die Verluste zu begrenzen: Der Versand der DMV-Mitteilungen an die Mitglieder im Inland wird mit 2024 eingestellt, die Anzahl der Hefte der IMN wird von 3 auf 2 pro Jahr verringert. Das Lektorat wurde eingespart. Es wird auch eine Anpassung des Mitgliedsbeitrages an die Inflation beantragt werden. Die trotzdem entstehenden Verluste sollen durch Einnahmen durch die alle zwei Jahre stattfindenden Tagungen ausgeglichen werden.

J. Wallner berichtet weiter von dem 2023 erneuerten Abkommen mit der DMV, wo die wechselseitige Ermäßigung des Mitgliedsbeitrags und die gemeinsame Abhaltung von Veranstaltungen geregelt sind. Die Vereinbarung über die Abnahme der Mitteilungen der DMV ist nicht mehr enthalten.

Der Herausgeber der IMN Clemens Fuchs bedankt sich bei den Kollegen der IMN-Redaktion für die tolle Zusammenarbeit und allen Autorinnen und Autoren der letzten Hefte für ihre Beiträge. Er bittet auch weiterhin um Mitwirkung und lädt ein, interessante Beiträge an ihn zu senden. Er berichtet noch einmal, dass ab 2024 nur mehr zwei Hefte pro Jahr erscheinen sollen. Typischerweise wird das im Juni und im Dezember der Fall sein. Zudem werden neuerdings neue Mitglieder nur mehr ohne Nennung des Geburtsjahres sowie der genauen Anschrift gemeldet.

Clemens Heuberger berichtet über Änderungen, die den Datenschutz betreffen. Das bisher in der Mitgliederdatenbank abgespeicherte Geburtsdatum wird gelöscht, und die Suche nach Mitgliedern auf der ÖMG-Webseite wird nicht mehr angeboten. Zusätzlich ist eine Revision der ÖMG-Jobbörse geplant.

Der Vorsitzende Wallner berichtet, dass 2023 wieder ein Förderungspreis, zwei Studienpreise, ein Schülerinnen- und Schülerpreis vergeben wurden — siehe den

separaten Bericht über die am selben Tag stattgefundene Preisverleihung.

TOP 3.

Bericht des Rechnungsprüfers und gegebenenfalls Entlastung des Vorstands

Peter Szmolyan und Monika Dörfler haben am 31.08.2023 die Bücher der ÖMG geprüft und für in Ordnung befunden. Sie bestätigen die Korrektheit und beantragen (schriftlich) die Entlastung des Vorstanden, was *einstimmig angenommen* wird.

TOP 4.

Berichte aus den Landessektionen und den Kommissionen

Klagenfurt: C. Heuberger berichtet in Vertretung von A. Wiegele über Berufungsverfahren in Statistik (läuft) und Optimierung (Nachfolge Rendl, ist noch offen). Barbara Kaltenbacher wurde zum wirklichen Mitglied der ÖAW gewählt. Im Jahr 2024 werden *50 Jahre Mathematik in Klagenfurt* gefeiert. Geplante Veranstaltungen sind von Jänner bis Juni der Wettbewerb „Mathematik sichtbar machen“, vom 1.-4. Juli die Ausstellung „Mathematik begreifen“, und am 25.06.2024 eine Jubiläumsfeier mit Gauß-Vorlesung.

Linz: F. Pillichshammer berichtet schriftlich, dass die Landessektion im laufenden Jahr zwei Projekte zur Nachwuchsförderung finanziell unterstützt hat, nämlich die Projektwoche Angewandte Mathematik von 12.-16.02.2023 im Landesbildungszentrum Schloss Weinberg, und den Náboj-Teamwettbewerb am 21.04.2023.

Wien: S. Gerhold berichtet schriftlich über personelle Veränderungen. An der TU Wien hat Julia Eisenberg am 1.09.2022 eine Laufbahnstelle für Versicherungsmathematik angetreten, Michael Feischl ist seit 1.11.2022 Prof. für Computational Partial Differential Equations. Sandra Müller hat seit 1.12.2022 eine Laufbahnstelle in Mengenlehre. Im März 2023 startetet der ERC Synergy Grant *Polynomial-time Computation* von Michael Pinsker an der TU Wien. Im Juni 2023 wurden Clemens Sämann (Univ. Wien) und Máté Gerencsér (TU Wien) mit START-Preisen ausgezeichnet. An der Universität Wien ist die Professur Computational Partial Differential Equations (Nachfolge Schmeiser) ausgeschrieben, außerdem ist eine Tenure-Track-Stelle für Foundations of Machine Learning in Finance.

Graz: G. Leobacher berichtet von der Berufung von J. Thuswaldner an der MU Leoben, den laufenden Verfahren an der TU Graz (Nachfolge Woess und Tichy) und den Berufungen an der Univ. Graz (E. Faber, M. Kalck in Algebra, L. Trussardi in Angewandter Mathematik) sowie die Besetzung eines Senior Scientist für Mathematische Software durch B. Hackl. Es werden auch zwei Professuren in Data Science installiert werden. Auch in Graz gibt es weniger Studierende, trotz eines neues Studienplans mit „flacherem“ Einstieg. Die hauptsächliche Aktivität der Landessektion Graz in diesem Jahr war das Ausrichten der ÖMG-Tagung.

Innsbruck: H.-P. Schröcker berichtet, das eine §99/4-Professur „Numerik kinetischer Gleichungen“ im Dezember 2022 mit Lukas Einkemmer besetzt wurde. Die Landessektion hat die folgenden Veranstaltungen gefördert: Österreichische Mathematikolympiade (Junior Regionalwettbewerb), Náboj-Wettbewerb Innsbruck, den Early Student Award der ÖMG, und den Tag der Mathematik und Physik.

Salzburg: S. Blatt berichtet, dass 2023 der erste Math-Cup Salzburg stattgefunden hat, der mit ca. 650 Teilnehmern auf sehr große Resonanz gestoßen ist. Die Landessektion hat diese Veranstaltung mit ca. € 700 unterstützt. Das Berufungsverfahren um die §98-Professur „Geometrie/Optimierung“ (Nachfolge Buchta) läuft. Die §99/5-Professur „Didaktik der Mathematik“ wird ab Herbst mit Sarah Schönbrodt besetzt. Johannes Czermak ist am 20.08.2023 verstorben.

TOP 5.

Wahlen des Vorstands und der Rechnungsprüfer:innen

Der Vorsitzende berichtet, dass er selbst für eine weitere Periode als Vorsitzender zur Verfügung steht. Auch die weiteren Mitglieder des aktuellen Vorstands haben ihre Bereitschaft bekundet, ihre Tätigkeiten weiter auszuüben.

Die Sitzungsleitung wird an die stellvertretende Vorsitzende M. Ludwig übergeben, um eine geheime Wahl des Vorsitzenden (Vorschlag Wallner) durchzuführen. Die Stimmen werden von Monika Ludwig und Gunther Leobacher ausgezählt. Wallner wird bei 21 abgegebenen Stimmen mit 20 Ja-Stimmen gewählt. Wallner übernimmt wieder die Sitzungsleitung und beantragt, die weiteren Mitglieder des Vorstands zu bestätigen. Diese sind M. Ludwig (stv. Vorsitzende), C. Fuchs (Herausgeber der IMN), P. Grohs (Kassier), D. Smertnig (stv. Kassier), H. Egger (Schriftführer), M. Haltmeier (stv. Schriftführer), V. Fischer (Beauftragte für Frauenförderung), C. Heuberger (Beauftragter für Öffentlichkeitsarbeit). E. Aichinger als Verantwortlicher für die Entwicklungszusammenarbeit ist kein Vorstandsmitglied, seine Weiterbestellung ist jedoch ebenfalls im Antrag enthalten. Der Antrag wird *einstimmig* angenommen.

J. Wallner beantragt, P. Smzolyan und M. Dörfler als Rechnungsprüfer zu bestellen, was ebenfalls *einstimmig* passiert.

TOP 6.

Festlegung des Mitgliedsbeitrags für die Folgejahre

J. Wallner erläutert die seit der letzten Erhöhung des Mitgliedsbeitrags im Jahr 2015 kumulierte Inflation und schlägt vor, den Beitrag von bisher € 35,– ab dem Jahr 2024 auf € 45,– anzuheben Dies ist eine der Maßnahmen zur Sicherstellung der finanziellen Stabilität der ÖMG. Der Vorschlag wird *einstimmig angenommen*.

TOP 6.

Veranstaltungen und Fördermaßnahmen der ÖMG

J. Wallner berichtet, dass die nächste Tagung 2025 zusammen mit der DMV in Linz stattfinden wird. Das Organisationskomitee sowie das Programmkomittee sind bereits festgelegt und haben die Arbeit aufgenommen. Für die „kleine“ Tagung 2027 gibt es noch keine Bewerbungen, aber erste Überlegungen. Der *Tag der Mathematik*, an dem in den Jahren dazwischen die Preise der ÖMG vergeben werden, sowie das Vernetzungstreffen im Rahmen des Early Student Awards wird es ebenfalls weiterhin geben. Letzteres ist eine sinnvolle und sehr gut angenommene Maßnahme zur Nachwuchsförderung.

TOP 7.

Allfälliges

Die stv. Vorsitzende M. Ludwig bedankt sich bei den anwesenden Organisatoren (J. Wallner und G. Leobacher) für die wunderschöne Tagung.

Vorsitzender: Johannes Wallner *Schriftführer:* Clemens Fuchs (i.V.)

Verleihung der Preise der ÖMG am 22. September 2023 in Graz

Im Rahmen der ÖMG-Tagung in Graz wurden am Freitag den 22.9. die diesjährigen Preise der ÖMG verliehen. Der Schülerinnen- und Schülerpreis ging an *Jakob Kapelari*, Akademisches Gymnasium Innsbruck (Betreuungslehrer: Neil Bradley). Seine Arbeit mit dem Titel *An investigation into path lengths of trees in graph theory* untersucht die Frage nach der erwarteten Anzahl an Knoten in einem zufälligen Weg, der in einem Knoten beginnt und in einem Blatt endet. Die Arbeit, die Literatur von Abel 1826 bis zur Online Encypledia of Integer Sequences verarbeitet, wurde von der Jury unter Leitung von Gabriela Schranz-Kirlinger ausgewählt.

Es gab auch zwei Studienpreise. Einer ging an *Koustav Banerjee*, Univ. Linz, für seine Arbeit *New Asymptotics and Inequalities Related to the Partition Function*, betreut von Peter Paule an der Univ. Linz. Darin werden für die Partitionsfunktion $p(n)$, für welche Ramanujan das Wachstum $p(n) \sim Ce^{\sqrt{n}}/n$ gezeigt hatte, signifikante schärfere Ungleichungen betreffend das asymptotische Wachstum hergeleitet. Es handelt sich dabei nicht bloß um Verbesserung von Konstanten, die Resultate lassen auch weitere Folgerungen zu. Etwa weiß man jetzt, dass $p(n)$ für $n > 26$ log-konkav ist. Um diese Resultate zu erzielen, wurden insbesondere symbolische Summationsmethoden angewandt. Die Arbeit führte zu einer großen Anzahl an Publikationen (2 angenommene und 6 eingereichte).

Die zweite Studienpreisträgerin ist *Susanna Haziot*, Brown University. Ihre Arbeit *Wave-Current Interactions* wurde betreut von A. Constantin an der Univ. Wien. Die einzelnen Kapitel der Dissertation behandeln verfeinerte Kriterien betreffend

Links J. Wallner, Schülerpreisträger J. Kapelari, mitte K. Banerjee, rechts S. Haziot (Fotos G. Leobacher).

Singularitäten in der Fornberg-Witham-Gleichung (1-dimensionale Wellen); elliptische Probleme im Zusammenhang mit Existenz, Regularität und Eindeutigkeit geophysikalischer Flüssen der Polargebiete; und das Existenzproblem für Wasserwellen. Dabei geht es um die Eulergleichung für inkompressible Fluide in einem Ansatz, der große Amplituden, Stagnationspunkte und überhängen Wellenfronten zu behandeln erlaubt. Eine Kombination aus Funktionalanalysis, harmonischer Analyse und Bifurkationstheorie führt zu Existenzresultaten. Aus dieser Dissertation sind 6 Publikationen hervorgegangen (3 angenommen und 3 eingereicht).

Der Förderungspreis 2023 ging an Daniel Smertnig, siehe die Laudatio von Alfred Geroldinger weiter unten. Im Anschluss an die Verleihung der Preise hielten die drei Preisträgerinnen und Preisträger aus 2022 und 2023 jeweils einen Vortrag über ihr Gebiet, nämlich: Oliver Roche-Newton, Univ. Linz, über *Elementary methods for the sum-product problem*, Sandra Müller, TU Wien, über *Independence Phenomena in Mathematics: Current Obstacles and Scenarios for Solutions*, und Daniel Smertnig, Univ. Graz, über *On factorizations in noncommutative rings*.

Laudatio für Daniel Smertnig aus Anlass der Verleihung des ÖMG-Förderungspreises 2023

Dear Colleagues, dear Daniel,

it is a great pleasure for me to give this laudatory speech for Daniel Smertnig, on the occasion of receiving the Förderungspreis of the Austrian Mathematical Society in 2023. I will start with some information on his vita and then I discuss some of his scientific achievements.

Daniel was born on May 23rd, 1986, in Bad Eisenkappel. He attended HTL Mössingerstraße in Klagenfurt. In 2006, he started to study mathematics at the

Links J. Wallner und Förderungspreisträger Daniel Smertnig, mitte der Laudator A. Geroldinger und D. Smertnig, rechts Detail mit Inzinger-Medaille (Fotos G. Leobacher).

University of Graz. During the master program he spent one year at Utrecht University (Netherlands). In his Bachelor thesis, he disproved a conjecture by Weidong Gao and Yuanlin Li on group algebras.

In spring 2011, he started his PhD under my supervision, within the Doctoral Program Discrete Mathematics. As a side remark, this program is now continued in the frame of the Graz School of Discrete Mathematics and Daniel is already the second prize winner who graduated in this program. The first one was Christopher Frei. During his PhD program, Daniel spent half a year at the University of Padova, where he worked with Alberto Facchini. He received a Best Paper award of the Doctoral School *Mathematics and Scientific Computing* at the University of Graz and Graz University of Technology and graduated in summer 2014.

After a few PostDoc years at the University of Graz, he won an FWF-Erwin-Schrödinger Grant and went to the US and Canada, where he worked with John Voight and Jason P. Bell. After that he accepted an offer for a professorship at our department, where he has served as the group leader of the algebra and number theory group. This year, he won an FWF standalone project, entitled *Modules, Monoids, and Factorizations* and he accepted an attractive offer from the University of Ljubljana. The Faculty of Mathematics and Physics at the University of Ljubljana is a center of non-commutative ring theory, and Daniel will start there on October 1st, 2023.

Daniel's main research area is non-commutative ring theory, with a focus on their ideal, module, and factorization theory. Moreover, his work on noncommutative power series has substantial overlap with automata theory and theoretical computer science. Quite a lot of his papers appeared in first class journals, such as the Transactions of the AMS, Trans. of the London Math. Soc., Advances in Mathematics, Journal für Reine und Angewandte Mathematik, Journal of the European

Mathematical Society, and others.

Let us have a short glance at four of his papers.

(i) Noncommutative rational Polya series (with J. Bell, Selecta Math., 2021).

This paper is in the overlap of algebra, number theory, and applications in computer science. The authors show that rational Polya series are unambiguous rational series, and this settles a forty year old conjecture by Reutenauer. Also several of his most recent papers deal with applications to automata theory and theoretical computer science.

(ii) Every abelian group is the class group of a simple Dedekind domain (Trans. AMS, 2017).

Realizing abelian groups as class groups of certain types of rings, is a classic, but still highly active topic in ring theory (indeed, it dates back to the 1960s when Claborn proved that every abelian group is isomorphic to the class group of a commutative Dedekind domain). Daniel settles an open problem stated in the monograph by Levy and Robson. Indeed, in Section 57, the authors list eight key problems. Problem 7 runs as follows:

> What abelian groups can occur as the ideal class group $\mathcal{G}$ of a simple Dedekind prime ring?

Daniel showed that every abelian group can be realized as the class group of a simple Dedekind prime ring (this is a non-commutative ring).

(iii) Factoriality and class groups of cluster algebras (with A. Garcia Elsener and P. Lampe, Advances in Math., 2019).

A commutative integral domain is factorial if and only if it is a Krull domain with trivial class group. Locally acyclic cluster algebras are Krull and research so far was restricted to studying when such domains are factorial. In this paper, the authors study (for the first time) the class group of such cluster algebras and the distribution of height-one prime ideals in the classes. As a corollary, they obtain that every finite nonempty subset of $\mathbb{N}_{\geq 2}$ occurs as a set of lengths in such a cluster algebra (apart from exceptional cases).

(iv) Factorizations in bounded hereditary Noetherian prime rings (Proc. Edinburgh Math. Soc., 2019).

A key method in factorization theory runs as follows. In order to study the arithmetic of a ring R and in order to understand how badly the ring R fails to be factorial, one constructs (a much simpler) semigroup B and a transfer homomorphism $\theta : R \to B$, which allows to pull back arithmetic properties from B to R. There is a well-developed transfer machinery for commutative integral domains. The best understood class of rings are Krull domains. They allow a transfer homomorphism to monoids of zero-sum sequences over their class group, whence the arithmetic can be studied with methods from additive combinatorics. Daniel

is one of the pioneers extending this transfer machinery to noncommutative rings. In this paper, he constructs a transfer homomorphism from bounded HNP rings to commutative Krull monoids (and hence to monoids of zero-sum sequences). This implies that lots of arithmetic properties in HNP rings coincide with those of commutative Krull monoids (which was quite a bit of surprise to all people in this community). The approach is based on the structure theory of finitely generated projective modules over HNP rings, as developed by Levy and Robson.

This short discussion demonstrates that Daniel has built himself a well-deserved international reputation, which is documented not only by his papers in first-class journals but also by the list of invited conference and seminar talks. To conclude, I would like to congratulate Daniel for winning the ÖMG Förderungspreis 2023. I wish him all the best for his new start in Ljubljana and I am sure that he will in the future, as he did in the past, surprise the ring theory community with exciting new results.

(Alfred Geroldinger)

ÖMG-Studierendentreffen mit Early Student Award

Von 17. bis 19. Mai 2023 fand das 6. ÖMG Studierendentreffen in Strobl am Wolfgangsee statt. Die 22 hervorragendsten Mathematikstudierenden des 4. Semesters aller österreichischen Universitäten wurden von der ÖMG in das Bildungsinstitut für Erwachsenenbildung eingeladen. Das Treffen dient der Förderung und Vernetzung der jungen Mathematikerinnen und Mathematiker über die Grenze ihrer eigenen Hochschule hinaus.

Gruppenfoto bei der Wanderung

Als Highlight stand die Verleihung des Early Student Awards am Program. Dieser wird gemeinsam mit einer einjährigen kostenlosen Mitgliedschaft der ÖMG

im Rahmen des Treffens an die Teilnehmerinnen und Teilnehmer verliehen. Die Nominierung dieser erfolgt durch die Lehrveranstaltungsleiter der Pichtlehrveranstaltungen der ersten beiden Studienjahre. In Vorträgen wurden akademische und nichtakademische Karrierewege und die Vielfalt der mathematischen Forschung und Anwendung präsentiert. Ein wichtiges Augenmerk bei der Planung des Programms lag bei der Förderung der Interaktion der Studierenden. Dies spiegelte sich unter anderem bei zufällig vorgegebenen Tischordnungen bei den Mahlzeiten, einer gemeinsamen Schifffahrt und Wanderung sowie bei Diskussionsrunden wider.

Die Preisträger sind

- Benedikt Fegerl, Ian Hornik, Julia Lin, Daniel Mayr, Alexander Zach (*TU Wien*),
- Nadia Fellin, Svenja Vivien Sturma, Hannah Maria Veit (*Uni Innsbruck*),
- Lorenz Hübel, Mina Joksimovic, Quirin Karl, Christoph Lennard Trautmann, Nina Trojer (*Uni Wien*),
- Martin Bernhard Göldner (*Uni Klagenfurt*),
- Thiemo Dsubanko, Alois Schaffler, Nazarii Shkarlat (*TU Graz*),
- Selina Bauer, Simon Grünbacher (*JKU Linz*),
- Andrea Hochreiter, Stefan Kojic und Viktor Kopplinger (*Uni Salzburg*).

Die Organisatoren beziehungweise Vortragende der Veranstaltung waren Michael Pinsker (TU Wien), Peter Szmolyan (TU Wien), Wolfgang Woess (TU Graz), Tim Netzer (Uni Innsbruck), Christian Krattenthaler (Uni Wien) und Vesna Vrhovac (Aldi Süd Holding).

Abschließend möchten wir noch unseren persönlichen Eindruck dieser Veranstaltung teilen: Es herrschte eine lockere Atmosphäre, die uns viele Gelegenheiten für den Austausch mit den Professoren unserer sowie auch der anderen Universitäten bot. Während manche Vorträge das Bild vermittelten, dass man für eine erfolgreiche Karriere an der Universität perfekt sein müsste, wurden wir in persönlichen Gesprächen dann doch noch davon überzeugt, dass man nicht Hilbert oder Gauß heißen muss, um ein erfolgreicher Mathematiker zu werden.

(Benedikt Fegerl, Ian Hornik, Julian Lin, Daniel Mayr, Alexander Zach)

Neue Mitglieder

Banerjee Koustav, Dr. – Kolkata/India. Dr. Banerjee completed his PhD study under supervision of Prof. Dr. Peter Paule in December, 2022 from Research Institute for Symbolic Computation (RISC), Johannes Kepler University, Linz. The topic of his dissertation was on asymptotics and inequalities related to the partition function. Currently, he is a post-doctoral member at the same institute mentored by Prof. Paule. His research interests broadly lie in Number Theory, Combinatorics, and Special Functions with a major focus to the theory of partitions. For his thesis Dr. Banerjee received the ÖMG-Studienpreis 2023.

Pühringer Tom – Altenfelden.

Gludovatz Robin – Wien. Lehramt Mathematik, Chemie und Informatik. Mitarbeiter beim Projekt MmF an der Universität Wien sowie Lehrkraft in Wien.

Linzer-Sommer Isabella – Wien. Lehrende im Verbund Nord-Ost (PH Niederösterreich, Universität Wien) Geometrie.

Prenner Lukas – Kottingbrunn. Lehrer an der MMS Gumpoldskirchen von 2010 bis 2023. Seit 2019 PH Niederösterreich und Verbund Nord-Ost Mitarbeit in der Erst- bzw. Fortbildung.

Welschbillig Uwe – Mettlach/Deutschland.

Kazeev Vladimir, Dr. – Wien. BSc and MSc in Applied Mathematics and Physics at the Moscow Institute of Physics and Technology in Russia from 2005 to 2011, PhD in Mathematics at the Seminar for Applied Mathematics, Department of Mathematics, ETH Zurich in Switzerland from 2011 to 2015. Postdoctoral researcher, Section of Mathematics, University of Geneva (Switzerland) from 2015 to 2017 and Szegő Assistant Professor, Department of Mathematics, Stanford University (USA) from 2017 to 2019. Since 2019 Assistant Professor at the Faculty of Mathematics, University of Vienna.

Pultar Dominik – Wien. Bundessieger an der OMÖ 2023.

Kapelari Jakob – Innsbruck. Schülerpreis 2023.

Ausschreibung der Preise der ÖMG

Ausschreibung des ÖMG-Förderungspreises 2024

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2024 wieder ihren jährlichen Förderungspreis. Infrage kommen junge Mathematikerinnen oder Mathematiker, die in überdurchschnittlichem Maße durch ihre mathematische Forschung hervorgetreten sind und welche einen wesentlichen Teil ihrer Arbeiten in Österreich erbracht haben. Dabei soll die Promotion mindestens zwei bis maximal zehn Jahre zurückliegen. (Überschreitungen sind möglich bei Kindererziehungszeiten und bei nachweislichen Präsenz- oder Zivildienstzeiten.)

Die Nominierung muss durch eine bzw. einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigte habilitierte Mathematikerin bzw. beschäftigten habilitierten Mathematiker erfolgen. Der Vorschlag muss in elektronischer Form *bis spätestens 11. März 2024* beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Beschreibung und Wertung der wissenschaftlichen Leistung; 2. Publikationsliste; 3. Wissenschaftlicher Lebenslauf der bzw. des Nominierten.

Aus den eingereichten Vorschlägen wählt eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträgerin oder den Preisträger aus. Der Preis ist mit 1.000 € und einer Ehrenmedaille dotiert. Außerdem wird die Preisträgerin oder der Preisträger eingeladen, beim nächsten ÖMG-Kongress in einem Vortrag über die erzielten Forschungsergebnisse zu berichten. Sollte die Preisträgerin oder der Preisträger noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie oder er auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.-Prof. Dr. Johannes Wallner, TU Graz. email *oemg@oemg.ac.at*.

Ausschreibung der ÖMG-Studienpreise 2024

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft vergibt auch 2024 wieder bis zu zwei Studienpreise. Die Preisträger sollen junge Mathematikerinnen und Mathematiker sein, die in den Jahren 2022 oder 2023 eine Diplom- oder Masterarbeit (im Folgenden als Masterarbeit bezeichnet) bzw. eine Dissertation eingereicht haben.

Voraussetzung für den Studienpreis für Masterarbeiten ist ein Abschluss eines Master- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Voraussetzung für den Studienpreis für Dissertationen ist entweder der Abschluss des Dok-

toratsstudiums an einer österreichischen Universität oder, im Falle eines Doktoratsstudiums an einer ausländischen Universität, das Vorliegen eines abgeschlossenen Master- oder Diplomstudiums an einer österreichischen Universität. Die Nominierung muss durch eine bzw. einen zum Zeitpunkt der Nominierung in Österreich an einer Universität oder Forschungseinrichtung beschäftigte Mathematikerin bzw. beschäftigten Mathematiker erfolgen.

Der Vorschlag muss in elektronischer Form *bis spätestens 11. März 2024* beim Vorsitzenden der ÖMG einlangen und folgende Unterlagen enthalten: 1. Ein Exemplar der als besonders hochqualifiziert bewerteten mathematischen Masterarbeit bzw. Dissertation; 2. Zwei begründete Bewertungen dieser Arbeit; 3. Einen Lebenslauf der bzw. des Nominierten einschließlich einer kurzen Beschreibung des Studienablaufs.

Aus den eingereichten Vorschlägen werden durch eine vom Vorstand der ÖMG eingesetzte Begutachtungskommission die Preisträgerinnen bzw. Preisträger ermittelt. Jeder ÖMG-Studienpreis ist mit 500 € dotiert. Jede Preisträgerin bzw. jeder Preisträger erhält eine Urkunde. Sollte die Preisträgerin oder der Preisträger noch nicht Mitglied der ÖMG sein, so wird sie bzw. er auf Wunsch in die ÖMG aufgenommen und vom Mitgliedsbeitrag für das erste Jahr befreit.

Adresse für Einsendungen: Univ.-Prof. Dr. Johannes Wallner, TU Graz. email *oemg@oemg.ac.at*.

Ausschreibung der Schülerinnen- und Schülerpreise der ÖMG 2024

Die Österreichische Mathematische Gesellschaft zeichnet herausragende vorwissenschaftliche Arbeiten, die im Schuljahr 2023/24 an österreichischen Schulen entstanden sind und die einen starken Bezug zu Mathematik oder Darstellender Geometrie aufweisen, mit Preisen aus. Diese Arbeiten müssen in elektronischer Form, als PDF-Datei, *bis 6. Juli 2024* bei der ÖMG einlangen und werden von einer Jury begutachtet.

Die Verfasserinnen und Verfasser jener Arbeiten, die im Zuge dieser Begutachtung durch die Jury ausgewählt werden, werden zu einem Kurzvortrag eingeladen, in dem sie ihre Arbeit präsentieren können. Anschließend erfolgt die Preisverleihung. Die Präsentationen der prämierten Arbeiten und die Preisverleihung finden im Herbst 2024 zu einem noch festzusetzenden Termin statt.

Die ÖMG bittet alle ihre Mitglieder sowie die Leserinnen und Leser der IMN, potenziell Interessierte über diese Einladung zu informieren und Schulen zur Teilnahme zu ermuntern.

Adresse für Einsendungen: Univ.-Prof. Dr. Johannes Wallner, TU Graz. email *oemg@oemg.ac.at*.