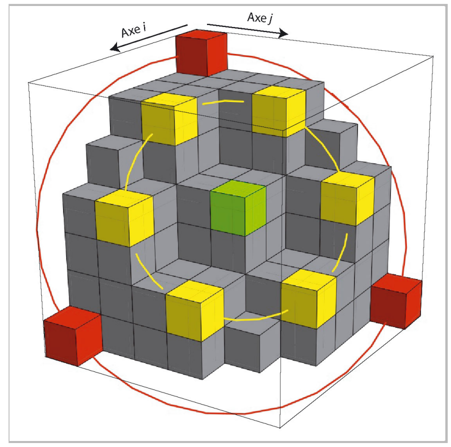
Actualités | 04/02/2011 | Réagir à cet article | < Précédent - Suivant >
Mathématiques

Un théorème pour des empilements de cubes

Trois mathématiciens ont démontré la conjecture d'Andrews et Robbins relative aux « partitions planes totalement symétriques », un problème de combinatoire énumérative.

Maurice Mashaal



Manuel Kauers

Cette « partition plane » (en représentation tridimensionnelle), de taille maximale égale à 8, est totalement symétrique : la figure reste identique à elle-même lorsqu'on permute entre eux les axes *i*, *j* et *k*. Sous l'effet de ces permutations, des sous-ensembles de cubes s'échangent entre eux. Chacun de ces sous-ensembles est nommé orbite. Trois orbites *(en couleurs)* sont représentées ici. La conjecture démontrée porte sur le nombre de partitions planes totalement symétriques dont le nombre d'orbites est donné.

Prenons l'entier 4. En n'utilisant que l'addition et des entiers positifs, on peut l'écrire de cinq façons : 4, 3 + 1, 2 + 2, 2 + 1 + 1 et 1 + 1 + 1 + 1. On dit que 4 a cinq partitions. Déterminer le nombre de partitions d'un entier, question résolue depuis longtemps, relève de la combinatoire énumérative. Ce domaine des mathématiques porte sur de nombreux problèmes analogues, qu'il s'agisse d'algèbre ou de géométrie. Il en est ainsi des « partitions planes », une généralisation à deux dimensions des partitions des entiers, que l'on rencontre dans divers champs des mathématiques et dans certains modèles de la physique statistique. Or Manuel Kauers, de l'Université de Linz, en Autriche, et deux collègues travaillant aux États-Unis, Doron Zeilberger et Christoph Koutschan, viennent de prouver une conjecture relative aux partitions planes énoncée vers 1983, de façon indépendante, par George Andrews et par David Robbins, aux États-Unis.

Une partition plane P est un tableau d'entiers positifs $P_{i,\,j}$ (*i* = 1, 2, etc., *j* = 1, 2, etc.) dont la somme est finie et qui décroissent en passant d'une ligne à la suivante ou d'une colonne à la suivante ; autrement dit,

$P_{i,\,j} \geq P_{i+1,\,j}$ et $P_{i,\,j} \geq P_{i,\,j+1}$.

On représente une telle partition plane par un empilement de cubes sur un damier dont chaque case est identifiée par ses coordonnées (*i, j*), en empilant $P_{i,\,j}$ cubes sur la case (*i, j*), la verticale constituant un troisième axe *k*.

La conjecture d'Andrews et Robbins démontrée par M. Kauers et ses collègues porte sur les « partitions planes totalement symétriques ». Il s'agit des empilements, au sens défini plus haut, dont la forme reste inchangée lorsqu'on permute les axes de coordonnées *i, j* et *k (voir la figure)*. Dans ce cas, chaque groupe de cubes qui s'échangent entre eux

POUR EN SAVOIR PLUS

Ch. Koutschan *et al.*, Proof of George Andrew's and David Robbin's q totally symmetric plane partition conjecture (TSPP), *PNAS*, prépublication en ligne, 24 janvier 2011.

L'AUTEUR

Maurice Mashaal est rédacteur en chef de *Pour la Science*.

forme une « orbite ». La conjecture devenue théorème affirme qu'en développant en somme de puissances entières de q le produit (sur toutes les valeurs de i, j, k jusqu'à N) des termes

$$(1 - q^{i + j + k - 1})/(1 - q^{i + j + k - 2}),$$

le coefficient de q^m dans le développement compte les partitions planes totalement symétriques (de taille N au plus) dont le nombre d'orbites est égal à m.

Ce résultat, où des calculs algébriques par ordinateur ont joué un rôle capital, clot une série de conjectures relatives aux partitions planes totalement symétriques, listée par l'Américain Richard Stanley en 1986.

Discutez cet article

Il n'y a encore aucune réaction à cet article >> Soyez le premier à réagir

>> Revenir en haut de page