Die Kunst der Zahlen

Die Sache mit π ist noch nicht ausgestanden. Wird sich nach 2500 Jahren Suche irgendwann doch ein Muster in den Ziffernfolgen hinter dem Komma zeigen? Mittlerweile sind rund 50 Milliarden Stellen der Kreiszahl berechnet, und noch immer ist keine Regelmäßigkeit in Sicht. Warum beschäftigen sich Mathematiker heute noch mit π? Die Antwort ist einfach: Die Zahl π existiert – und das reicht als Motiv; jedenfalls für Mathematiker.

Der Schatz an ungelösten mathematischen Problemen ist groß: Gibt es unendlich viele Mersennesche Primzahlen? Ist die Riemannsche Vermutung richtig? Was steckt hinter den bezaubernden Gebilden der Fraktalen Geometrie, was hinter chaotischen Prozessen? Seit Jahrtausenden betreiben die Menschen Mathematik. Bereits die alten Griechen entdeckten die irrationalen Zahlen. Archimedes, der größte Mathematiker der Antike, fand eine geniale Formel zur Berechnung von π. Im 19. Jahrhundert wurden nicht-euklidische Geometrien entdeckt, in denen keine parallelen Geraden existieren und wo die Winkelsumme im Dreieck nicht 180 Grad beträgt.

Naturwissenschaftliche Theorien werden bisweilen widerlegt oder zumindest relativiert. Lehrbücher aus Molekularbiologie sind binnen weniger Jahre veraltet. Und wer weiß heute schon, ob die Superstring-Theorie in der Physik Bestand haben wird? Mathematik hingegen gilt als Bastion der Unvergänglichkeit. Der pythagoreische Lehrsatz ist heute so taufrisch wie vor 2500 Jahren, und an der von den Griechen bewiesenen Unendlichkeit der Primzahlen gibt es auch nichts zu rütteln. Das Jahr 2000 wurde auf Initiative der „Internationalen Mathematischen Union" zum „Jahr der Mathematik" ausgerufen, um die „zentrale Bedeutung der Mathematik und ihrer Anwendungen für die moderne Welt" zu würdigen.

Die Fachwelt zweifelt ohnehin nicht an ihrer Bedeutung: Was der Begründer der Volkswirtschaftslehre, Adam Smith, einst in gedrechselter Prosa formulierte, drücken moderne Theoretiker mit topologischen Fixpunktsätzen, Differenzialgleichungen und spieltheoretischen Modellen aus. Viele naturwissenschaftliche Theorien werden längst in Differenzialgleichungs-Sy-

FOTO: R. RIEDLER

Der international erfolgreiche Biomathematiker Martin Andreas Nowak, 34, beschreibt komplexe biologische Zusammenhänge mit mathematischen Modellen. In erster Linie beschäftigt sich der Wiener – derzeit an der Universität Princeton in den USA, vorher in Oxford – mit Virusinfektionen. Über die mathematische Analyse von Ergebnissen aus dem Klinikbereich errechnet Nowak die wichtigen Komponenten molekularer Modelle wie beispielsweise des HI-Virus. Für seine Erfolge wurde er mit dem Weldon Memorial Prize, einer der höchsten Biometrie-Auszeichnungen, geehrt.

=12-3-4+5-6+7+89=12+3+4+5-6-7+89=1+23-4+5+6+78-9=1+23-4+56+7+8+9=1+2+3-4+5+6+78+9=100

In der Schule gefürchtet, im Alltag ignoriert, führte die Mathematik lange ein Schattendasein. Doch in jüngster Zeit erlebt sie weltweit eine Renaissance. In Österreich erklärt der FWF die Mathematik gar zum Forschungsschwerpunkt

Ein Bericht von Thomas Vasek

stemen ausgedrückt. Ohne präzise Berechnungsmodelle wären Computertomografie im Spital oder der CD-Player im Wohnzimmer undenkbar.

Salonfähige Mathematik

Doch die Funktionsweise von Prozessoren im Inneren eines CD-Players kann nicht das Interesse erklären, das die Mathematik derzeit in der Populärkultur weckt. Der Wiener Kulturhistoriker Ernst Strouhal (siehe Seite 46) konstatiert: „Wo früher Marx und Freud das notwendige Sozialprestige am Wirtshaustisch, in den Medien und Arbeitskreisen herstellten, läuft heute nichts mehr ohne Poincaré und Gödel. Kaum eine Stunde vergeht, und man landet bei Physik und Mathematik. Natürlich nicht bei dem trockenen Zeug, das man in der Schule gelernt und vergessen hat, es sind schon anspruchsvollere Sachen, die beschäftigen: Subtilitäten der Topologie und der Quantenmechanik, Chaostheorie und nicht-euklidische Geometrie." Bücher wie „Fermats letzter Satz" von Simon Singh oder „Der Mann, der die Zahlen liebte" über das ungarische Genie Paul Erdös tauchen in Bestsellerlisten auf; in dem erfolgreichen Kino-Thriller „π" von Darren Aronofsky ist der Protagonist ein verschrobener Mathematiker, der den vermeintlich ultimativen Computer entwirft.

FOTO: ATELIER HOMOLKA

Die Entdeckung der Theorie der Gröbner-Basen machte den Mathematiker Bruno Buchberger, 65, international bekannt: Der Innsbrucker fand einen exakt berechenbaren Lösungsansatz für nicht-lineare Gleichungen, eines der fundamentalen Probleme der algebraischen Geometrie. Gerechnet wird nicht mit ungefähren Zahlen, sondern mit abstrakten Symbolen – das erleichtert beispielsweise die Berechnung von computergesteuerten Fertigungsprozessen. Bruno Buchberger ist Begründer des RISC (Research Institute for Symbolic Computation) in Linz.

Woher also das neuentflammte Interesse? Die Antwort: Mathematische Objekte sind interessant, weil sie da sind. Die Mathematik verschließt sich – darin der Kunst nicht unähnlich – dem Diktat der reinen Nützlichkeit. Damit verweigert sie sich der zunehmenden gesellschaftlichen Ökonomisierung und profitorientierten Legitimationsforderungen. Ein zweiter Grund: Die Mathematik hat über die Jahrtausende eine Sprache entwickelt, die – einmal erlernt – weltweit verstanden wird. Kein lokaler Dialekt, keine nationale Interpretation trüben eine einmal in Formeln ausgedrückte Aussage – im Zeitalter der Globalisierung eine bemerkenswerte Kommunikationsbasis. Der russische Schriftsteller Ilja Ehrenburg: „Die Mathematik gehört zu jenen Äußerungen menschlichen Verstandes, die am wenigsten von Klima, Sprache oder Traditionen abhängen." Ein letzter Aspekt: In einer Ära permanenter Veränderungen –

Der Mathematiker Gerhard Larcher, 39, setzt sich mit Fragen der klassischen Zahlentheorie auseinander: Er analysiert Algorithmen, wie beispielsweise das Problem der „schnellen Primfaktor-Zerlegung". Seine Arbeit ist unter anderem in der Kryptografie oder im Bereich der Finanz- und Versicherungsmathematik von zentraler Bedeutung. Unter seiner Projektleitung werden sich sechs österreichische Forschungsgruppen in einem vom Forschungsfonds bewilligten Forschungsschwerpunkt mit zahlentheoretischen Algorithmen und deren Anwendungen beschäftigen.

und den Ängsten vor ihnen – bietet die Mathematik eine Perspektive von Ewig- und Gültigkeit. Keine andere Wissenschaft jongliert so souverän – und zugleich derart präzise – mit fast mystischen Begriffen wie Unendlichkeit.

Seifenblasen als Studienobjekt

„Ich habe nie etwas gemacht, das nützlich gewesen wäre", meinte der große britische Zahlentheoretiker Godfrey Harold Hardy (1877–1947): „Für das Wohlbefinden der Welt hatte keine meiner Entdeckungen – ob im Guten oder im Schlechten – je die geringste Bedeutung, und daran wird sich vermutlich auch nichts ändern." Hardy behielt zwar Unrecht, weil eines seiner Forschungsobjekte – die Primzahlen – in der Verschlüsselungstechnik von heute eine große Rolle spielt. Doch angetrieben wird mathematische Forschung heute wie zur Zeit von Archimedes von der puren Neugierde. Die Impulse können von überall her kommen – auch wenn mathematisch interessante Objekte dem damit konfrontierten Laien bisweilen recht sonderbar anmuten.

Mathematische Knotentheorie zum Beispiel beschäftigt sich, nun ja – mit Knoten eben. Es geht darum, „äquivalente" Knoten zu klassifizieren, die sich ohne Zerschneiden ineinander überführen lassen. Die Anregung zu einem anderen fruchtbaren Strang der modernen Mathematik kam von einem Lieblingsspielzeug der Kinder – von Seifenblasen. Wissenschaftler entdeckten, dass beim Eintauchen von Drahtschlingen in eine Seifenlösung eine Haut entsteht, die einen geringeren Flächeninhalt als jede andere von der Schlinge eingespannte Fläche besitzt. Die berühmte Dachkonstruktion des Münchner Olympiastadions wurde nach dem Seifenfilm-Prinzip minimaler Flächen geschaffen.

Aber Mathematik behandelt nicht bloß Zahlen und Räume. Sie sucht nach Ordnung, nach Mustern. Doch manchmal kann Struktur auch täuschen – besonders in der exzentrischen Welt der Primzahlen.

Der Mathematiker Christian Krattenthaler, 41, gehört auf dem Gebiet der algebraischen Kombinatorik zur internationalen Spitzenklasse. Am Institut für Mathematik an der Universität Wien beschäftigt sich der Wissenschaftler vor allem mit grundlegenden Problemstellungen seines Faches: Unter anderem arbeitet er an der Vereinfachung von Lösungsabläufen für mathematische Beweisführungen. Mit Hilfe eines Hochleistungs-Computers, der ihm viele Rechenschritte erleichtert, analysiert er alle möglichen Beweisstrategien für eine mathematische Behauptung, um so zu einer möglichst kurzen Lösungsform zu kommen. Die von ihm erarbeiteten Rechenvorgänge stellen wichtige Grundlagen für den Bereich der algebraischen Kombinatorik dar.

Die Zahlen 31, 331, 3331, 33.331, 333.331, 3.333.331, 33.333.331 sind allesamt Primzahlen, also Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Man würde vermuten, dass sich das Muster fortsetzt. Irrtum. Die Zahl 333.333.331 besitzt die Faktoren 17 und 19.607.843.

Mit Mustern beschäftigen sich auch jene beiden Zweige der Mathematik, die sich – letztlich dank der computerunterstützten Visualisierbarkeit – im Feuilleton, auf Clubbing-Flyern und auf T-Shirts wiederfanden: Chaostheorie und fraktale Geometrie entsprachen ganz dem Zeitgeist der frühen 90-er Jahre, der sich mit einer hochvernetzten, immer komplexer werdenden Welt konfrontiert sah. Kaum zufällig versuchte man das Chaos in der Wirtschaftstheorie anzuwenden. Chaostheorie beschäftigt sich mit dem Lösungsverhalten komplexer dynamischer Gleichungssysteme, die extrem empfindliche Anfangsbedingungen aufweisen. Obwohl die Gleichungen deterministisch sind, also Ursache-Wirkung-Beziehungen ausdrücken, können derartige Systeme unvorhersagbares, „chaotisches" Verhalten zeigen. In der Meteorologie sind solche verblüffenden Effekte seit längerem bekannt: Geringfügige Veränderungen, im Extremfall der Flügelschlag eines Schmetterlings, können langfristige Wetterprognosen unmöglich machen.

Die fraktale Geometrie behandelt komplizierte, selbstähnliche Muster und Strukturen, die in allen Größenordnungen immer mehr Details offenbaren – mathematisch monströse Gebilde, die „dicker" als eine Kurve und doch „dünner" als eine Fläche sind. Hinter der bestrickenden Schönheit fraktaler Objekte steht oft das chaotische Verhalten einer einfachen Gleichung. Fraktale Strukturen in der Natur, wie manche Farnpflanzen, Gebirgszüge oder Küstenlinien, verstärkten den Eindruck, hier sei ein universales Prinzip am Werk. Die Chaostheorie lieferte das scheinbar passende Schlagwort zur allge-

FOTOS: ATELIER HOMOLKA

meinen Unübersichtlichkeit. Doch die wissenschaftliche Bedeutung von Chaos und fraktaler Geometrie ist umstritten. Viele Mathematiker sehen darin bloß einen künstlich aufgebauschten, wenngleich pittoresken Seitenstrang der Forschung. Chaos und Fraktale waren im Prinzip schon seit mehr als 100 Jahren bekannt.

Ein Beweis auf 15.000 Seiten

Andererseits rückte durch die modische Chaostheorie die Mathematik in den Blickpunkt der Öffentlichkeit. Auch bekennende mathematische Analphabeten waren fasziniert von Fraktalen. Plötzlich konnte jedermann auf seinem Computer mit Mandelbrot-Mengen experimentieren, ohne auch nur eine Ahnung von Gleichungen mit komplexen Zahlen zu haben, die solche Mengen hervorbringen. Doch die Mandelbrot-Männchen erwiesen sich schnell als trügerische Hoffnungsträger: Die moderne Mathematik ist Laien nur äußerst begrenzt zugänglich. Das liegt vor allem an ihrem kumulativen Charakter: Die Mathematik baut auf, verästelt sich in immer mehr Teilgebiete, die nur noch von hochspezialisierten Fachleuten überblickt werden. Ein Beispiel: Eine der mathematischen Mammutleistungen des Jahrhunderts war die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (Gruppen sind Mengen, für deren Elemente bestimmte Verknüpfungseigenschaften gelten). Der von einem Forscherteam geführte Beweis umfasst 15.000 Seiten, und angeblich kann weltweit nur ein Mathematiker für sich in Anspruch nehmen, die komplette Arbeit durchdrungen zu haben. Noch 1910 wollte eine Expertenkommission der Universität Princeton die Gruppentheorie als nutzlos vom Lehrplan streichen. Heute ist dieser Begriff in der Theorie der Gleichungen und in der Zahlentheorie ebenso von großer Bedeutung wie in der Kristallografie und der Atomphysik.

FOTO: ATELIER HOMOLKA

Der START-Preisträger Norbert Mauser, 35, arbeitet auf dem Gebiet der angewandten Mathematik mit Themen der mathematischen Physik. Er beschäftigt sich mit Problemen, die aus der Synthese der fundamentalen Gleichungen von Boltzmann und Schrödinger entstehen. Ein wichtiges Werkzeug sind die Wignertransformationen, ein von Mauser mitentwickeltes Verfahren, mit dem man Differenzialgleichungen in kinetische Gleichungen umwandeln und damit exakte Lösungen errechnen kann.

Mit Beweisen wie diesem wird klar, warum der Popularisierung der Mathematik Grenzen gesteckt sind. Und nicht alles lässt sich visualisieren. Selbst der berühmte mathematische Physiker Stephen Hawking schreibt im Vorwort seiner „Kurzen Geschichte der Zeit", er habe auf jede Formel verzichtet, da er wisse, dass jeder mathematische Ausdruck in einem Buch die Zahl der Leser halbiere. „Was die Riemannsche Vermutung ist, kann man jemandem, der nur die Matura hat, nicht erklären", resigniert der Wiener Professor Christian Krattenthaler vom Institut für Mathematik der Uni Wien.

FOTO: PRIVAT

Mit dem Ziel, Ideen aus den verschiedenen mathematischen Gebieten wie der Bildverarbeitung oder der Strömungsmechanik zu kombinieren, beschäftigt sich der Industriemathematiker Otmar Scherzer, 35, mit möglichen Synergien. Der START-Preisträger 1999 verändert dabei mathematische Modelle, die normalerweise zur Bestimmung von Konturen in Bildern dienen, derart, dass man diese beispielsweise zur Rekonstruktion von Mikrostrukturen in elastischen Stoffen verwenden kann.

Genau aus diesem Grund verteidigen Chaostheoretiker ihr oftmals von Kollegen geschmähtes Fachgebiet: „Es könnte sein, dass die heftige Reaktion so mancher gegen fraktale Geometrie und Chaostheorie mehr damit zu tun hat, dass Chaos und Fraktale Teilgebiete der Mathematik zu einem öffentlichen Ereignis machen und damit die sorgfältig etablierten Klostermauern um die behütete Mathematik einreißen," mutmaßen die Forscher Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe von der Universität Bremen.

Automatisierte Mathematiker?

Als wäre das Image der Verschrobenheit nicht schlimm genug, glauben viele, dass die Mathematiker im Computerzeitalter ohnedies irgendwann brotlos werden. Tatsächlich hat der Computer auch die Mathematik beeinflusst. Viele Entdeckungen der letzten Jahrzehnte wären ohne die Megarechner nicht möglich gewesen. 1976 bewiesen die US-Mathematiker Kenneth Appel und Wolfgang Haken das berühmte Vierfarbenproblem, dass nämlich vier Farben ausreichen, um jede Landkarte so einzufärben, dass niemals Länder der gleichen Farbe aufeinandertreffen. Die beiden kamen schließlich mit massiver Computerunterstützung zum Erfolg. Doch die Dis-

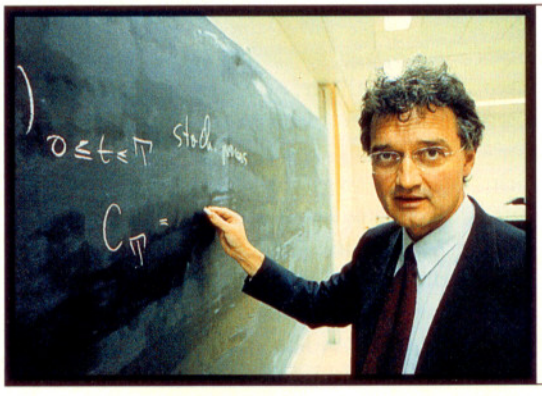

FOTO: ATELIER HOMOLKA

Mit der mathematischen Beweisführung eines fundamentalen Satzes über die Bewertung von Optionen erlangte Walter Schachermayer, 49, Wittgensteinpreisträger 1998, im Fachbereich der Versicherungs- und Finanzmathematik bereits großes Ansehen. Der Wissenschaftler der TU Wien erarbeitet komplexe Systeme wie Finanztransaktionen mit Hilfe wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle, deren Einsatz beispielsweise in der Börsenwelt unabdinglich ist.

International renommierte Mathematik aus Österreich – gefördert durch den Wissenschaftsfonds

Mit der finanziellen Förderung durch den österreichischen Wissenschaftsfonds hat sich in Österreich in den letzten Jahren ein international anerkanntes Zentrum der Grundlagen- und anwendungsorientierten Forschung im Bereich der Mathematik entwickelt. Daraus wuchsen zum Teil weltweit einzigartige Forschungsgruppen heran, die unter anderem wichtige Beiträge im Bereich der Industrie- oder Finanzmathematik liefern konnten:

Im Jahr 1996 bewilligte der FWF zwei Spezialforschungsbereiche (SFB) mit einer vorgesehenen Laufzeit von zehn Jahren, deren Projekte sich mit aktuellen anwendungsorientierten Problemen auseinandersetzen: Die methodische Entwicklung im Bereich der „künstlichen Intelligenz" mit der Erforschung der möglichen Anwendungsgebiete wie „künstliche Fabriken" oder „künstliche Finanzmärkte" ist eines der Ziele des an der Wiener Wirtschaftsuniversität angesiedelten SFB „Selbstlernende Modelle in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften". Mit Hilfe von mathematischen Modellen entwickelt die Gruppe, bestehend aus Wirtschaftsexperten, Technikern und Mathematikern, computergestützte Konzepte für die Anwendung in der Wirtschaft. An diesem Projekt beteiligt ist der Finanzmathematiker Walter Schachermayer, Wittgensteinpreisträger 1998 (siehe Seite 43). Die Entwicklung und Anwendung neuer Softwaresysteme für Hochleistungsrechner ist das SFB-Thema einer Gruppe von Wissenschaftlern der Universität, der TU und des European Center for Parallel Computing in Wien – geleitet vom Mathematiker Heinz Zima. Im 1997 bewilligten SFB „Numerisches und Symbolisches Rechnen" beschäftigen sich Mathematiker der Uni Linz wie der Computerspezialist Bruno Buchberger (siehe Seite 41) und der Linzer Industriemathematiker Heinz Engl mit der Entwicklung von effizienten Werkzeugen für Computersimulationen in der Struktur- oder Strömungsmechanik. Im

kussion hält an, ob der Beweis tatsächlich korrekt ist. Noch heute sind viele, wenn nicht die meisten Mathematiker stolz darauf, dass sie im Prinzip nicht mehr als Papier und Bleistift für ihre Arbeit benötigen. Viele stehen Computerbeweisen daher skeptisch gegenüber.

Andere hingegen finden mittlerweile Programmieren „lustiger als das Beweisen", wie der US-Professor Doron Zeilberger auf seiner Homepage meint. Zeilberger sorgte in den letzten Jahren mit einem Computerprogramm für Furore, das am laufenden Band Beweise für kombinatorische Formeln publizierte. Einen Schritt weiter geht Bruno Buchberger, Institutsvorstand am Linzer RISC-Institut (Research Institute for Symbolic Computation) der Johannes Kepler Universität. Sein Programm „Theorema" kann mittlerweile grundlegende Sätze der Analysis, etwa über Grenzwerte, automatisch beweisen. Der amerikanische Informatiker Douglas B. Lenat, ein Star auf dem Gebiet der Künstlichen Intelligenz, hat bereits vor Jahren ein Programm mit dem Namen „Automatischer Mathematiker" geschrieben, dem er sogar ein gewisses Maß an mathematischer Intuition zubilligt.

Wird der Computer eines Tages den Mathematiker ersetzen? „Davon sind wir noch weit entfernt", beruhigt Christian Krattenthaler. Mathematik hat ein ungeheuer kreatives Potential. Wo Probleme gelöst sind, entstehen neue. Die Anregungen stammen aus anderen Disziplinen, aus technologischen Entwicklungen, aus der Mathematik selbst. Nicht zuletzt die rapide Entwicklung der Computer fordert das mathematische Denken aufs Neue heraus. In den 40-er Jahren waren es die mathematischen Theorien von John von Neumann und Alan Turing, die letztlich zur Entwicklung der ersten Computer führten.

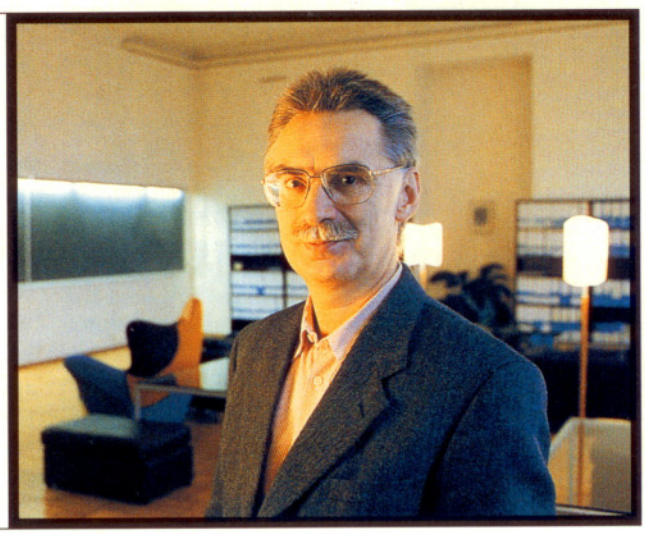

FOTO: ATELIER HOMOLKA

Der Mathematiker Karl Sigmund, 54, beschäftigt sich mit spieltheoretischen Ansätzen bei evolutionären Entwicklungsprozessen. Der Wissenschaftler am Wiener Institut für Mathematik bringt dabei mögliche Strategien der Evolution in einen Zusammenhang mit ökologischen Modellen. Er berechnet unter Einsatz spieltheoretischer Gedankenexperimente und mathematischer Modelle komplexe Anpassungsvorgänge und ausgeklügelte Fortpflanzungsmechanismen. Sigmund leistet mit seiner Forschung wichtige Grundlagen für Fachbereiche wie Biomathematik, Biologie oder die Evolutionsforschung.

Die Codes der Zukunft

Heute gibt es zwar noch keine funktionsfähigen Quantencomputer, doch die mathematischen Konzepte dafür liegen bereits vor. Die Realisierung des superschnellen Rechners, der tausendfach flinker kalkulieren kann als heutige Computer, stellt wiederum die mathematische Lehre von der Verschlüsselung, die Kryptografie, vor neue Herausforderungen: Die Sicherheit unserer Codes beruhte bislang darauf, dass Faktorisierung – die Zerlegung von Zahlen in ihre Primfaktoren – bei hinreichend großen, zum Beispiel 100stelligen Faktoren zu einem äußerst zeitraubenden Unterfangen wird. Mit einem Quantencomputer ließen sich mit einem Schlag die gängigsten Krypto-Algorithmen brechen. Das wird neue, derzeit boomende Wirtschaftszweige wie E-Commerce, die zwecks Geldtransfers auf absolut sichere Codes angewiesen sind, vor enorme Probleme stellen. Es wird wiederum die Mathematik sein, die im kommenden Jahrhundert auf Basis der Quantenkryptografie die sicheren Verschlüsselungsalgorithmen der Zukunft entwickelt.

Und dieses kommende Jahrhundert übrigens fängt erst am 1. 1. 2001 an – streng mathematisch gesehen.